



**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA**  
**INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO**

**MESTRADO EM**

Matemática Aplicada à Economia e à Gestão / Investigação Operacional

**TÉCNICAS NUMÉRICAS DE AVALIAÇÃO DE OPÇÕES**

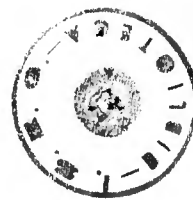
LUÍS JORGE RIBEIRO POLÓNIA

**Orientação:** Professor Doutor João Ferreira do Amaral

**Júri:**

Presidente: Professor Doutor João Martins Ferreira do Amaral  
Vogais: Professor Doutor Vasco Maria Portugal e Castro de Orey  
Professor Doutor João Manuel de Sousa Andrade e Silva

Outubro / 1997



# ÍNDICE

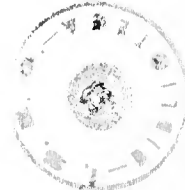
ÍNDICE	i / vii
AGRADECIMENTOS	viii
INTRODUÇÃO	I / VI

## CAPÍTULO I - OPÇÕES: CONCEITOS ELEMENTARES

1. INTRODUÇÃO	1
2. ASPECTOS FUNDAMENTAIS DAS OPÇÕES	3
3. FACTORES DETERMINANTES DO VALOR DE UMA OPÇÃO	6
4. RELAÇÕES DE ARBITRAGEM	10
4.1. Limites superior e inferior dos valores dos contratos de Opções Call	10
4.2. Limites superior e inferior dos valores dos contratos de Opções Put	15
5. RELAÇÕES ENTRE OPÇÕES EUROPEIAS E OPÇÕES AMERICANAS	18
6. RELAÇÃO DE PARIDADE <i>CALL-PUT</i> ( <i>CALL-PUT PARITY</i> )	20
7. ESTRATÉGIAS NEGOCIAIS ENVOLVENDO OPÇÕES	24
7.1. <i>Payoff diagrams</i> em estratégias elementares não protegidas	24
7.2. <i>Payoff diagrams</i> em estratégias elementares protegidas	26
8. CONCLUSÃO	32

## CAPÍTULO II - MODELO BINOMIAL

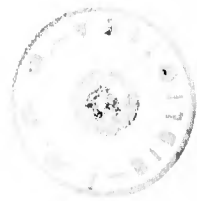
1. INTRODUÇÃO	34
2. AVALIAÇÃO DE UMA OPÇÃO CALL EUROPEIA A UM - PERÍODO SOBRE UMA ACÇÃO QUE NÃO PREVÊ PAGAMENTO DE DIVIDENDOS	35
3. AVALIAÇÃO DE UMA OPÇÃO CALL EUROPEIA A DOIS - PERÍODOS SOBRE UMA ACÇÃO QUE NÃO PREVÊ PAGAMENTO DE DIVIDENDOS	39



4. AVALIAÇÃO DE UMA OPÇÃO CALL EUROPEIA A N - PERÍODOS SOBRE UMA ACÇÃO QUE NÃO PREVÊ PAGAMENTO DE DIVIDENDOS	43
5. MODELO BINOMIAL PARA ACÇÕES QUE PREVÊEM PAGAMENTO DE DIVIDENDOS	44
5.1. "Known Dividend Yield"	45
5.2. "Known Dollar Dividend"	46
6. DETERMINAÇÃO DE $u$ , $d$ E $p$	47
7. CONCLUSÃO	49

### **CAPÍTULO III - MODELO DE COMPORTAMENTO DO PREÇO DAS ACÇÕES**

1. INTRODUÇÃO	50
2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA SATISFEITA PELO PREÇO DE UMA ACÇÃO	51
3. A PROPRIEDADE LOGNORMAL DO PREÇO DE UMA ACÇÃO	54
4. DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BLACK-SCHOLES	56
5. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BLACK-SCHOLES	59
6. AVALIAÇÃO NUMA ECONOMIA NEUTRA AO RISCO	60
7. PROPRIEDADES DA FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES	63
8. PAGAMENTO DE DIVIDENDOS	67
8.1. Opções europeias	68
8.1.1. Versão de Merton da fórmula de Black-Scholes	69
8.2. Opções americanas	70
8.2.1. Fórmula de Roll-Geske-Whalley	71
9. OS PARÂMETROS $\mu$ , $r$ , E $\sigma$	72
9.1 Estimativa de $r$	73



9.2. Estimativa de $\sigma$	73
9.2.1 Histórico dos preços da Acção	74
9.2.2. Método das volatilidades implícitas	75
9.2.3. Outros métodos	76
10. CONCLUSÃO	77

## **CAPÍTULO IV - GENERALIZAÇÃO DA ANÁLISE DE BLACK- - SCHOLES**

1. INTRODUÇÃO	79
2. DERIVADOS DE UMA VARIÁVEL DE ESTADO	80
2.1. Preço de Risco	80
2.2. Equação Diferencial	83
3. OPÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS DE ESTADO	84
3.1. Preço de Risco	84
3.2. Equação Diferencial	86
4. CONCLUSÃO	87

## **CAPÍTULO V - MODELOS ALTERNATIVOS DE AVALIAÇÃO DE UMA OPÇÃO**

1. INTRODUÇÃO	88
2. DESVIOS NOS VALORES (" <i>PRICING BIASES</i> ")	89
3. MODELO DA VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA	91

3.1. Derivação da equação diferencial para o valor de uma Opção sobre uma Acção	92
3.2. Valor exacto da opção em função do seu valor de Black-Scholes	94
3.2.1. - Valor da Opção supondo o preço da Acção e a volatilidade não correlacionados	95
3.2.1.1. - Propriedades do valor de uma Opção	96
3.2.1.2. - Estudo da relação entre o valor de Black-Scholes de uma opção e o valor exacto da opção	98
3.2.2. - Valor da opção supondo o preço da acção e a volatilidade correlacionados	100
4. OUTROS MODELOS ALTERNATIVOS	101
4.1. Modelo da opção composta	102
4.2. Displaced Diffusion Model	104
4.3. Constante da elasticidade da variância	106
4.4. The pure jump model	107
4.5. The jump diffusion model	109
5. CONCLUSÕES	110

## CAPÍTULO VI - MÉTODOS NUMÉRICOS

1. INTRODUÇÃO	112
2. TÉCNICAS DE SIMULAÇÃO	113
2.1. Utilização de Árvores	113
2.1.1. Árvores Binomiais	113
2.1.1.1. Árvores binomiais geométricas	114
2.1.1.2. Árvores binomiais aritméticas	117

2.1.2. Árvores Trinomiais	119
2.1.2.1. Árvores trinomiais geométricas	119
2.1.2.2. Árvores trinomiais aritméticas	121
2.2. Método de Monte Carlo	123
2.2.1. Antithetic Variable Technique	126
2.2.2. Control Variate Technique	127
3. MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	128
3.1. Método implícito das diferenças finitas	130
3.2. Método explícito das diferenças finitas	134
3.3. Métodos das diferenças finitas. - Versão logarítmica	135
3.3.1. Método explícito das diferenças finitas - Versão logarítmica	136
3.3.2. Método implícito das diferenças finitas. Versão logarítmica	139
4. CONCLUSÃO	141

## **CAPÍTULO VII - ESTUDO DE SIMULAÇÃO**

1. INTRODUÇÃO	143
2. ESTUDO DE SIMULAÇÃO	144
2.1. Metodologia adoptada para o Cenário I	144
2.1.1. Inicialização de variáveis	148
2.1.2. Análise e interpretação de resultados	149
2.2. Metodologia adoptada para o Cenário II	150
2.2.1. Inicialização de variáveis	152
2.2.2. Análise e interpretação de resultados	152
3. CONCLUSÃO	153

<b>CONCLUSÃO DO TRABALHO</b>	<b>161</b>
------------------------------	------------

## **ANEXO MATEMÁTICO - PROCESSOS E INTEGRAIS ESTOCÁSTICOS**

INTRODUÇÃO	163
1. NOÇÕES INTRODUTÓRIAS	163
2. PROCESSOS DE MARKOV	165
2.1. Processos de Difusão (ou Processos de Ito)	166
2.2. Movimento Browniano	168
2.2.1. Propriedades do Movimento Browniano	169
2.2.2. Movimento Browniano com Tendência	170
2.2.3. Movimento Browniano Geométrico	171
3. EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA DE ITO	174
4. INTEGRAL ESTOCÁSTICO DE ITO	177
4.1. Propriedades do integral estocástico de Ito	181
5. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA DE ITO	182
5.1. A solução como um processo de Markov	185
5.2. A solução como um processo de difusão (ou de Ito)	185
6. LEMA DE ITO	186
 APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 2 (CAP. I)	 190
 APÊNDICE B - EQUAÇÃO DIFERENCIAL A SER SATISFEITA PELO VALOR DE UM PRODUTO DERIVADO SOBRE UMA ACÇÃO QUE PREVÊ PAGAMENTO CONTINUADO DE DIVIDENDOS	     195
 APÊNDICE C - MODELO DE MERTON PARA A TAXA DE JURO ESTOCÁSTICA	  197

<b>APÊNDICE D</b>	
1. SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	200
2. PROCESSO GERADOR DE UMA AMOSTRA NORMAL	201
<b>APÊNDICE E</b>	202
<b>APÊNDICE F</b>	207
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	212



## AGRADECIMENTOS

Quero agradecer ao Senhor Professor Doutor João Ferreira do Amaral a disponibilidade, a dedicação e o empenho colocados na orientação deste trabalho. Ele não existiria, certamente, sem o seu contributo.

Um agradecimento também ao Senhor Professor Doutor João Andrade e Silva pela sua incondicional disponibilidade e pelo conjunto de sugestões críticas que tanto me ajudaram.

Aos Senhores Doutores Medina Carreira e David Estevão Gouveia um agradecimento especial pela amizade e incentivo dados na prossecução deste trabalho.

Todas as vírgulas, letras e palavras deste trabalho são justa, justissimamente, dedicadas à minha melhor *Opção*, a minha Mulher.

# INTRODUÇÃO

## 1. SÍNTESE DA TESE

Toda a actividade económica envolve riscos. A crescente volatilidade das principais variáveis macroeconómicas, em resultado da liberalização dos sistemas financeiros e do crescimento da competitividade entre as economias mundiais, acentuou, sobremaneira, esses mesmos riscos.

À parte isso, negociar é aceitar um conjunto de obrigações cujos proveitos futuros - e, potencialmente, eles existem sempre -, dependem da evolução incerta, imprevisível, de variáveis colaterais, tais como a cotação das Acções, o valor das taxas de juro, das taxas de câmbio, etc, normalmente incontroláveis.

É neste quadro económico-negocial que a importância dos *Derivados*, negociados em mercados formais segundo regras bem definidas, mais se faz sentir.

Os *produtos Derivados*, e as *Opções* em particular, inserem-se no conjunto dos instrumentos de negociação a prazo. Trata-se de contratos que se fazem no presente para serem liquidados, física e financeiramente, numa data futura.

Louis Bachelier, na sua dissertação de doutoramento em 1900, foi quem primeiro estabeleceu a relação entre *passeios aleatórios* e *processos de difusão* na sua tentativa de interpretar as flutuações aleatórias da Bolsa de Valores de Paris.

A pouca relevância então atribuída pela comunidade científica em geral e pela financeira, em particular, à sua tese sobre Acções e Dividendos, talvez seja mais compreensível se se disser que só em 1905 Albert Einstein teorizou os fundamentos matemáticos do *movimento browniano*, posteriormente desenvolvidos de forma intensa por Norbert Wiener, o qual admitiu ter Bachelier antecipado muitas das suas principais ideias.

A teoria da avaliação das *Opções* (*Option Pricing Theory*) possui, como se conclui, uma história já longa. Mas foi, provavelmente, o ano de 1973 que mais a marcou.

Foi, precisamente, nesse ano que Fisher Black e Myron Scholes apresentaram no já famoso *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, aquele que pode ser considerado o primeiro modelo de avaliação de *Opções* completamente satisfatório.

Robert Merton, a quem hoje, muito justamente, são reconhecidas iguais responsabilidades na derivação do referido modelo, aplicou-o, nesse mesmo ano, no seu *Theory of Rational Option Pricing*, a outros domínios. Estes dois trabalhos constituíram a base bibliográfica de muitos estudos académicos posteriores, incluindo este que aqui se inicia.

Os artigos de Black-Scholes e de Merton relativos à avaliação de *Produtos Derivados* (*Opções, Futuros, etc*) sobre distintos activos financeiros (Acções, Obrigações, Taxas de Juro, Câmbios, Índices, etc), conferiram às chamadas *Derivatives Securities* muita da relevância e credibilidade de que hoje desfrutam nas mais importantes praças financeiras mundiais.

Com efeito, uma correcta avaliação de produtos financeiros derivados de outros produtos, assim como de qualquer outra variável cujo comportamento no tempo se faça de um modo *incerto*, constitui, nos tempos que correm, face à elevada volatilidade dos mercados, uma preocupação estratégica vital no sistema financeiro da economia de um

país. Além do mais, as margens de erro permitidas, nos dias que correm, possuem *bandas* muitíssimo estreitas.

No essencial, estes autores demonstraram que a avaliação de um produto derivado depende da resolução de uma equação diferencial - obtida a partir da construção de um *portfolio* neutro ao risco e admitida a existência de *short selling* -, sujeita às *condições fronteira* específicas do derivado em avaliação.

Mais tarde, Cox e Ross generalizaram a análise de Black, Scholes e Merton à avaliação, numa economia neutra ao risco, de *produtos Derivados* dependentes do valor de variáveis de estado que não constituem *activos* transaccionáveis.

Dependendo da natureza das *condições fronteira* intrínsecas ao valor dos distintos *activos* associados, a *Equação Diferencial de Black-Scholes* poderá ou não admitir soluções analíticas para os correspondentes *Produtos Derivados*. Em muitas situações reais, tais soluções analíticas não existem ou, existindo, acarretam elevados custos computacionais.

Outros métodos de avaliação de *Produtos Derivados* merecem, neste contexto, uma atenção especial.

Falamos em concreto das chamadas *Técnicas Computacionais Numéricas*. Nestas se incluem, entre outros, os *Métodos Numéricos de ramificação em Árvore* (*Binomial* e *Multinomial*), a *Simulação de Monte Carlo*, os *Métodos Implícitos e Explícitos das Diferenças Divididas*, etc.

A utilização de *Árvores* foi sugerida por Cox, Ross e Rubinstein (1979). Estes autores demonstraram que o processo estocástico seguido pelo preço das Acções pode ser simulado a partir de uma *árvore binomial geométrica*.

Mais tarde, Boyle (1988), com o propósito de considerar a existência simultânea de duas variáveis de estado, introduziu o *modelo*

*trinomial geométrico*. Hull e White apresentaram, no mesmo ano, uma metodologia que pode ser utilizada para a construção de modelos multinomiais.

A utilização do método das *Diferenças Finitas* para a avaliação de *produtos Derivados* foi sugerida por Schwartz (1977). O método foi utilizado por Brennan e Schwartz (1978) para resolver a *equação diferencial de Black-Scholes*.

O propósito deste trabalho é, justamente, o de promover uma análise comparativa com o objectivo de se concluir acerca da eficiência computacional das técnicas numéricas enunciadas, numa situação em que as soluções analíticas ou não existem ou, existindo, são de extrema complexidade computacional.

## 2. ORGANIZAÇÃO DA TESE

Este trabalho está estruturado em sete Capítulos e diversos Apêndices.

No **Capítulo I** pretende dar-se resposta a questões do tipo: *o que são contratos de Opção Call e Put? o que distingue uma Opção Europeia de uma Opção Americana? quais são os factores determinantes do valor de uma Opção? quais os valores máximo e mínimo de um contrato de Opção Call ou Put? que relação existe entre os valores de duas Opções Call, uma Europeia a outra Americana? e entre os valores de duas Opções Put em idênticas circunstâncias? existe relação de paridade entre os valores de uma Opção Call e uma Opção Put, ambas Europeias? e se forem as duas Americanas? qual o efeito da existência de dividendos no valor de uma Opção? e na escolha do momento exacto do seu exercício? que tipo de estratégia negocial as Opções validam? porque razão se diz serem as Opções óptimos instrumentos de cobertura de risco?*

No **Capítulo II** apresenta-se um modelo discreto para a avaliação de Opções. Os princípios económicos fundamentais em que se baseia a

valoração de *Opções* usando métodos de arbitragem, tornam-se aqui particularmente evidentes. O *modelo Binomial* tratado neste capítulo requer conceitos matemáticos elementares e o seu estudo, no caso limite de se considerar infinitesimal o período de tempo considerado, conduzir-nos-á a um esboço do próprio modelo de Black-Scholes, adiante deduzido em moldes mais complexos. A partir do *modelo Binomial* proceder-se-á ainda ao desenvolvimento de procedimentos numéricos eficientes visando a avaliação de *Opções* para as quais a antecipação do exercício possa ser óptimo. É o caso das *Opções* sobre *Acções* que prevêm pagamento de *dividendos*.

O **Capítulo III** inicia-se enumerando as *propriedades* que o processo estocástico que descreve a evolução no tempo do preço da uma *Acção* deve traduzir. A partir dele demonstra-se que o preço futuro de uma *Acção*, conhecido o seu preço corrente, segue uma lei de probabilidade *lognormal*. Considerando este e outros pressupostos deduz-se a *Equação Diferencial de Black-Scholes* assumindo não ser possível obter ganhos imediatos, a partir de um *Portfolio* formado à custa de uma posição *longa* na *Opção* e de uma posição *curta* na *Acção* associada, se o valor de mercado da própria *Opção* tiver sido correctamente avaliado. A constatação de que na *Equação Diferencial de Black-Scholes* não entra o parâmetro relativo ao crescimento relativo esperado do preço da *Acção*, remete-nos para a possibilidade de uma avaliação independente do risco, ou seja, para a ideia de uma economia neutra ao risco. Tal significa que a rendibilidade esperada de uma *Acção* coincide com a taxa de risco-zero do mercado. Este *princípio* sugere uma via alternativa de avaliação de *Opções*, qual seja a que considera a existência de uma economia neutra ao risco. Reflecte-se ainda àcerca do modo como a *Fórmula de Black-Scholes* pode ser adaptada por forma a avaliar *Opções* Europeias e Americanas que prevejam o pagamento de *dividendos*. Termina-se referindo alguns procedimentos de estimação empírica da *volatilidade* do preço da *Acção*.

No **Capítulo IV** procedemos à generalização do princípio da avaliação numa economia neutra ao risco através da introdução do conceito de *Preço de Risco*.

No **Capítulo V** pretende demonstrar-se a fragilidade da *Fórmula de Black-Sholes* revelando algumas das suas limitações. Através da apresentação de Modelos Alternativos de avaliação de Opções procuramos retratar diferentes maneiras de interpretar a evolução no tempo do preço de uma Acção. Da sua análise resultará evidente a complexidade de tais modelos, o que nos conduz a outras possibilidades constituídas pelo recurso a métodos aproximativos. Deles se ocupa o capítulo seguinte.

Com efeito, no **Capítulo VI** serão apresentadas Técnicas Numéricas de avaliação de Opções. Dividimo-las em duas categorias: as *Técnicas de Simulação* e os *Métodos das Diferenças Finitas*. Entre as primeiras, as *simulações em Árvore* e o *Modelo de Monte Carlo* mereceram uma atenção especial. Relativamente às segundas destacamos os *Métodos Implícito e Explícito das Diferenças Finitas*. Falaremos, igualmente com pormenor, das suas versões logarítmicas.

O **Capítulo VII** é dedicado a um Estudo de Simulação procurando reflectir-se nele um conjunto de conceitos e técnicas anteriormente expostos.

# CAPÍTULO I

## OPÇÕES: CONCEITOS ELEMENTARES

### 1. INTRODUÇÃO

As Opções sobre *activos* financeiros - acções, obrigações, futuros, divisas, mercadorias, índices, etc - assumem, enquanto investimento, um papel preponderante nos principais mercados financeiros.

Para além de propiciarem a obtenção de altas taxas de rentabilidade face a modestos investimentos de capital, as Opções constituem igualmente óptimos instrumentos de "cobertura de risco", sendo, talvez, esta, a condição em que mais são utilizadas pelos profissionais.

Na verdade, um investidor que detenha uma Opção sobre um qualquer *activo*, expõe-se a uma perda. Esta perda é, por via das Opções, controlável, pois o seu valor máximo iguala o montante despendido com o prémio. Acresce que, no plano estritamente teórico, permanecem infinitas ou pelo menos ilimitadas as possibilidades de ganho.

Exemplificando: qualquer investidor com limitações financeiras, face a um hipotético investimento num particular *activo*, possui duas atitudes possíveis. A saber: ou adquire o *activo* ou adquire uma Opção Call sobre o mesmo. Se o preço do *activo* diminuir, a perda resultante da compra da Opção Call é, instantaneamente, mais pequena, pois, além de a Opção não ter que ser exercida, também os custos a que obriga são comparativamente mais baixos. Se, pelo contrário, o preço do *activo* aumentar, o retorno resultante da compra da Opção Call é, instantaneamente, superior, dado que o investimento foi menor.





São de diversa natureza as razões que fazem das Opções instrumentos negociais com características únicas, amplamente divulgados e largamente utilizados<sup>(1)</sup>.

Algumas dessas razões são óbvias, outras exigem um entendimento mais elaborado, de que daremos conta adiante. Porém, no que é substancial, as Opções distinguem-se dos instrumentos financeiros alternativos, fundamentalmente porque:

- possibilitam rendibilidades dificilmente igualáveis por quaisquer outros instrumentos que considerem isoladamente os *activos* a elas associados;

- favorecem *fórmulas* de aplicações, *activas* e *passivas*, a taxas mais favoráveis do que as tradicionalmente disponíveis nas instituições de crédito;

- permitem posições negociais sobre quaisquer *activos* em condições menos restritivas<sup>(2)</sup> do que as habituais;

- oferecem vantagens fiscais<sup>(3)</sup>;

- envolvem custos de transacção mais baixos;

- proporcionam mecanismos que permitem a constituição, para iguais níveis de risco, de *Portfolios* com *performances*<sup>(4)</sup> superiores;

- possibilitam meios de *cobertura do risco* face a alterações imprevistas, tanto na política de dividendos como na volatilidade do preço dos *activos*;

- constituem um meio legítimo de fazer face aos impedimentos legais inerentes às vendas *curtas* - ou a *descoberto* - de *activos* financeiros;

- a sua rendibilidade não depende da variação do seu próprio valor mas apenas da oscilação do preço dos *activos* que lhes estejam associados.

---

(1) Os contratos *standard* sobre Opções variam na sua duração. Porém, raramente excedem os 12 meses.

(2) "... limits on borrowing against long positions, limits on the use of proceeds from short sales, and requirements for collateral to guarantee performance on short sales.", COX. J., RUBINSTEIN, M., "Options Markets", p. 50.

(3) No caso português, vd. Decreto-Lei n.º 257-A/96, de 31 de Dezembro, Diário da República, I Série A, n.º 302/96, Suplemento.

(4) "... one that offers a higher expected return...", Autores e ob. cit. nota 2, p. 54.

## 2. ASPECTOS FUNDAMENTAIS DAS OPÇÕES.

Como em outros domínios do saber, o estudo das Opções obriga ao emprego de uma terminologia própria. Importa, por isso, enunciar os conceitos fundamentais que serão utilizados neste trabalho.

Assim, designaremos por:

**Prémio**, o montante pago para obter o direito de *opção*, isto é, o valor de mercado da própria Opção; **Preço do Exercício** ou **Strike Price** ( $X$ ), o preço fixo acordado para o *activo* subjacente no contrato de Opção; **Data de Expiração** ou **Vencimento** ( $T$ ), a data futura, pré-estabelecida, a partir da qual o contrato de Opção cessa.

O investidor responsável pela emissão do contrato de Opção será identificado como **Subscritor (Writer)**<sup>(5)</sup>; ao adquirente chamaremos **Comprador (Buyer)**<sup>(6)</sup> ou, simplesmente, **Detentor (holder)** da Opção.

Uma Opção admite duas naturezas, mutuamente excluentes: ou são Opções de **Compra** ou são Opções de **Venda**.

Assim,

### DEFINIÇÃO 1:

Define-se **Opção de Compra** ou **Opção Call** como sendo um contrato que atribui ao seu titular o direito, mas não a obrigação, de adquirir um ou mais títulos representativos de um certo *activo* (**underlying stock**), financeiro ou não, a um preço acordado (preço do exercício), numa data pré-estabelecida ( $T$ ) - data de expiração - ou noutra, anterior a ela ( $t$ ).

Existem duas **categorias** de Opções **Call** : **Opções Call Europeias (c)** passíveis de serem exercidas só na data da sua expiração ( $T$ ); e **Opções Call Americanas (C)** susceptíveis de serem exercidas em qualquer momento ou instante, anterior à data da expiração ( $t$ ).

As implicações contratuais de uma Opção Call à data da sua expiração, podem ser sintetizadas do seguinte modo.

---

<sup>(5)</sup> O subscritor da Opção - **option writer** - está obrigado a vender o *activo*, nos termos pré-acordados, sempre que o detentor da Opção - **option holder** - se decida a exercê-la.

<sup>(6)</sup> O detentor da Opção não está, de forma alguma, obrigado a exercê-la.

Considerando<sup>(7)</sup>:

$S(T)$  = preço do *activo* associado à Opção no instante  $T$ ;

$c(T)$  = valor da Opção *Call* no momento  $T$ ,

então

$$c(T) = \begin{cases} S(T) - X & \text{se } S(T) > X \\ 0 & \text{se } S(T) \leq X \end{cases}$$

ou, alternativamente,

$$c(T) = \max[0, S(T) - X].$$

Com efeito, é intuitiva a ideia de que o titular ou detentor de uma Opção de compra só beneficiará desse direito, exercendo a Opção, se o exercício desse direito lhe possibilitar um ganho. Dito de outra forma, só assim procederá se a diferença entre o preço do *activo* e o preço do exercício for superior ao valor *capitalizado* do prémio. A mesma Opção é deixada expirar, sem ser exercida, na situação contrária.

Em qualquer dos casos, existe sempre a possibilidade de venda da Opção a quem esteja interessado em a adquirir. Esta hipótese não será considerada neste trabalho.

Resumidamente:

se  $S(T) > X$ , diz-se que a Opção *Call* obteve ganho ou, ainda, que terminou ***in-the-money***, utilizando-se, enfaticamente, a expressão ***deep-in-the-money*** se o preço do *activo* exceder, em muito, o preço do exercício.

Caso  $S(T) \leq X$ , afirma-se que a Opção *Call* não obteve ganho<sup>(8)</sup> ou, ainda, que terminou ***out-of-the-money*** - ***deep-out-of-the-money*** - no caso de ocorrer a desigualdade, e ***at-the-money***, ocorrendo a igualdade.

De modo idêntico,

---

<sup>(7)</sup> Notações que de agora em diante se manterão.

<sup>(8)</sup> Neste caso, também se usa a expressão "obteve perda".

**DEFINIÇÃO 2:**

Define-se **Opção de Venda** ou **Opção Put** como sendo um contrato que assegura ao seu titular o direito, mas não a obrigação, de vender um ou mais títulos representativos de um *activo*, financeiro ou não, a um preço determinado, numa data pré-estabelecida ou noutra, anterior a ela.

De forma análoga, podem identificar-se duas categorias de Opções *Put*: **Opções Put Europeias (p)** passíveis de serem exercidas só na data da sua expiração; e **Opções Put Americanas (P)** susceptíveis de serem exercidas em qualquer momento (t).

Designando

$$p(T) = \text{valor da Opção Put no instante } T,$$

então

$$p(T) = \begin{cases} 0 & \text{se } S(T) \geq X \\ X - S(T) & \text{se } S(T) < X \end{cases}$$

ou, o que é equivalente,

$$p(T) = \max[0, X - S(T)].$$

Do mesmo modo,

se  $S(T) < X$ , diz-se, então, que a Opção Put obteve ganho ou que terminou ***in-the-money - deep-in-the-money***<sup>(9)</sup>; afirmando-se, no caso ***contrário*** - isto é, se  $S(T) \geq X$  - que a Opção Put não obteve ganho<sup>(10)</sup> ou, ainda, que terminou ***out-of-the-money - deep-out-of-the-money***<sup>(11)</sup> - no caso de ocorrer a desigualdade, e ***at-the-money***, ocorrendo a igualdade.

**DEFINIÇÃO 3:**

Chamamos **Classe** de Opções ao conjunto das Opções do mesmo *tipo* - ou Calls ou Puts -, todas sobre um mesmo *activo*.

---

<sup>(9)</sup> No caso de  $S(T) << X$ .

<sup>(10)</sup> Também nesta hipótese se usa a expressão "obteve perda".

<sup>(11)</sup> Caso  $S(T) >> X$ .

**DEFINIÇÃO 4:**

Designamos por **Série** a *sub-classe* de Opções com a mesma *data de expiração* e *idêntico preço de exercício*.

**DEFINIÇÃO 5:**

**5.1.** Designa-se por **Valor do Exercício** ou **Parity Value** de uma Opção *Call* ao

$$\text{máx}[0, S(T) - X].$$

**5.2.** Designa-se por **Valor do Exercício** ou **Parity Value** de uma Opção *Put* ao

$$\text{máx}[0, X - S(T)].$$

**DEFINIÇÃO 6:**

**6.1.** Designa-se por **Premium Over Parity** de uma Opção *Call* ao valor da diferença

$$c(T) - \text{máx}[0, S(T) - X].$$

**6.2.** Designa-se por **Premium Over Parity** de uma Opção *Put* ao valor da diferença

$$p(T) - \text{máx}[0, X - S(T)].$$

Das definições 5 e 6, é possível concluir que o valor de mercado de uma qualquer Opção não é mais do que a soma do seu *parity value* com o seu *premium over parity*.

**3. FACTORES DETERMINANTES DO VALOR DE UMA OPÇÃO.**

O valor de uma Opção varia de forma dinâmica, assumindo em cada instante  $t$ , um valor normalmente distinto do valor homólogo relativo ao instante anterior.

São seis os factores fundamentais na determinação do *valor de uma Opção* sobre um qualquer activo no instante  $t$ . A saber:

- o **preço de mercado do activo** associado à Opção no instante  $t$ ,  $(S(t))$ ;
- a **volatilidade**<sup>(12)</sup> do preço do **activo** associado à Opção ( $\sigma$ );
- o **preço de exercício** da Opção ( $X$ );
- a **taxa de juro** instantânea de risco-zero ( $r$ );
- a **data de expiração** da Opção ( $T$ );
- o valor dos **dividendos** pagos pelo **activo** ( $D$ ), caso esteja previsto o seu pagamento.

O valor de mercado de uma Opção num instante  $t$ , deverá, pois, numa primeira apreciação, ser determinado em função de alguns ou de todos os factores atrás considerados.

Genericamente, dir-se-á que o valor de uma Opção<sup>(13)</sup> num instante  $t$  é dado por uma função do tipo

$$f(t, S(t), \sigma, X, r, T, D),$$

sendo que a explicitação de  $f$  em função de alguns destes parâmetros, constitui, justamente, um dos objectivos deste trabalho.[vd. Capítulos II e III].

Detenhamo-nos, para já e tão só, na análise de como a variação de cada um dos factores individualmente considerados - isto é, supondo variável um dos factores e admitindo constantes todos os outros -, influencia de modo distinto a evolução do valor de uma mesma Opção.

### 3.1. Preço de mercado do activo associado à Opção no instante $t$ :

Sendo o preço de exercício da Opção definido *a priori*, quanto maior for o **preço do activo** no instante  $t$ , maior será, probabilisticamente falando, o **preço do activo** no momento do exercício. Donde, maior (menor) será o valor de uma Opção Call (Put) sobre o mesmo **activo**.

### 3.2. Volatilidade do preço do activo associado à Opção:

Quanto maior for a volatilidade do preço do **activo**, maior será a probabilidade de uma evolução favorável<sup>(14)</sup> do seu preço, logo, maior o

<sup>(12)</sup> Ou seja, o risco associado ao **activo**, calculado a partir do desvio padrão do crescimento relativo do preço do **activo**.

<sup>(13)</sup> No caso de uma Opção Call, usaremos a notação  $c(t, \bullet) = c(t)$  e a de  $p(t, \bullet) = p(t)$ , no caso de uma Opção Put.

valor da Opção (Call ou Put) sobre o *activo*. Dito de outra forma, o valor de uma Opção cresce com a volatilidade do preço do *activo* associado à Opção.

### 3.3. Preço de exercício da Opção:

Independentemente do preço de mercado do *activo* subjacente à Opção, quanto maior for o **preço de exercício** de uma Call (Put), menor (maior) é o valor da Opção. Dito de outra forma, o valor de uma Opção Call (Put) decresce (cresce) à medida que o preço do exercício cresce.

### 3.4. Taxa de juro instantânea de risco-zero:

A **taxa de juro** só de uma forma indirecta influencia o valor de uma Opção. Com efeito, na medida em que afecta o cálculo do valor "actualizado" do preço de exercício de uma Opção, a taxa de juro influi também na determinação do valor da mesma.

Assim, quanto maior for a taxa de juro, menor será o valor "actualizado" do preço de exercício; logo, maior (menor) será o valor de uma Opção Call (Put).

### 3.5. Data de expiração da Opção:

O tempo que decorre até ao vencimento de uma Opção actua sobre o seu valor de duas formas distintas:

a). quanto maior for o *prazo de expiração*, maior será, potencialmente, a volatilidade do preço do *activo* de base; logo, será também maior o valor das Opções - Call ou Put - associadas;

b). quanto maior for o *prazo de expiração*, menor será o valor "actualizado" do preço de exercício, logo maior será o valor da Opção Call e menor o da Opção Put;

O efeito conjugado destas duas "acções" determina que:

1.- o valor de uma Opção Call será tanto maior quanto maior for o seu prazo de expiração;

---

(14) O ganho nas Opções tem uma distribuição de probabilidade assimétrica, i.e, quanto maior for a subida (descida) do preço de mercado do *activo*, maior será o ganho das Opções Call (Put); porém, se o preço de mercado do *activo* descer (subir), a perda que daí resulta para uma Opção Call (Put) mantém-se constante.

- 2.- o valor de uma Opção Put varia na razão directa da preponderância de cada uma das "acções" a). e b)., individualmente consideradas.

### 3.6. Valor dos dividendos pagos:

Quanto maior for o valor dos *dividendos* pagos pelo activo de base, tanto menor (maior) será o valor subsequente da respectiva Opção Call (Put).

Os seis factores que acabámos de enunciar não excluem outros, também susceptíveis de influenciarem o valor das Opções. Basta pensar, a título de exemplo, na **rendibilidade ou crescimento relativo esperado do activo**<sup>(15)</sup>; na **atitude do investidor face ao risco**<sup>(16)</sup>; nos **encargos com impostos** (Tax rules); nos **custos de transacção** ou até outros de diversa tipologia.

O que os distingue dos anteriores?

Os primeiros seis são *universalmente*<sup>(17)</sup> decisivos na avaliação das Opções. A sua preponderância manifesta-se independentemente das metodologias adoptadas ou de outros critérios estabelecidos. Os últimos, só pontualmente<sup>(18)</sup> são relevantes.

Resumindo, no caso da Opção Call a função  $f$  será tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial S} > 0; \frac{\partial f}{\partial X} < 0; \frac{\partial f}{\partial \sigma} > 0; \frac{\partial f}{\partial r} > 0; \frac{\partial f}{\partial T} > 0; \frac{\partial f}{\partial D} < 0$$

e, no caso da Opção Put:

$$\frac{\partial f}{\partial S} < 0; \frac{\partial f}{\partial X} > 0; \frac{\partial f}{\partial \sigma} > 0; \frac{\partial f}{\partial r} < 0; \frac{\partial f}{\partial T} > 0; \frac{\partial f}{\partial D} > 0$$

(15) Este, só na hipótese de não se verificar a Teoria dos Mercados Perfeitos.

(16) *Idem*.

(17) "Those six variables are fundamental determinants of option values. They will always matter.", Autores e ob. cit. nota 2, p. 38.

(18) "... their affects will be relatively complex. Fortunately, many results of great practical value can be obtained without having to deal with these complications.", Autores e ob. cit. nota 2, p. 38.



## 4. RELAÇÕES DE ARBITRAGEM<sup>(19)</sup>

Os resultados que se seguem assumem a forma de *propriedades*, cuja observância permite aos investidores protegerem-se de estratégias especulativas - ditas *Riskless Arbitrage Opportunities*<sup>(20)</sup> - possíveis quando a exposição ao risco é excessiva. Eles foram pela primeira vez apresentados, ainda que de uma forma distinta, por Merton<sup>(21)</sup>.

Estas *propriedades* estabelecem um quadro de referência a que estará, necessariamente, obrigada uma qualquer metodologia coerente de avaliação do valor das Opções, sendo válidas tanto para Opções Europeias como para Opções Americanas.

As suas demonstrações far-se-ão por *redução ao absurdo*, indicando para toda a propriedade violada a correspondente *Riskless Arbitrage Opportunity*.

### 4.1. Limites superior e inferior dos valores dos contratos de Opções Call.

#### PROPOSIÇÃO 1.

$$S > c > \max\left[0, S - X, S - Xe^{-r(T-t)} - D\right].$$

Dem.

Se  $c \leq 0$ , um ganho imediato, sem riscos, pode ser conseguido comprando a Opção e detendo-a até à sua expiração.

Com efeito, a aquisição de uma Opção feita nestas circunstâncias, gera, *acto contínuo*, um influxo - e nunca saída - de dinheiro, não acarretando noutros momentos até ao seu vencimento, quaisquer perdas.

<sup>(19)</sup> Aqui entendida como intermediação lucrativa de dois mercados.

<sup>(20)</sup> "Riskless arbitrage opportunities (...) are situations that require no initial investment but yield a positive amount immediately and only non-negative amounts in the future under all possible circumstances.", Autores e ob. cit. nota 2, p. 127.

<sup>(21)</sup> MERTON, R. C., "Theory of Rational Option Pricing".

Se  $c < S - X$ , um ganho, sem riscos, pode ser conseguido comprando a Opção e exercendo-a *acto contínuo*<sup>(22)</sup>.

Se  $c < S - Xe^{-r(T-t)} - D$ , um ganho certo, sem riscos, pode ser conseguido constituindo-se o seguinte *Portfolio A* :

- compra de uma Opção Call;
- venda *curta* do *activo* associado;
- aquisição de uma quantia  $D$ ;
- aplicação do montante  $Xe^{-r(T-t)}$  em Obrigações de taxa  $r$  e maturidade  $T$  (data de expiração).

Dada a hipótese de partida, o valor do *Portfolio A*

$$S - Xe^{-r(T-t)} - D - c > 0$$

gerará, desde logo, ganho.

À data de expiração,  $D$  servirá para cobrir os *dividendos* devidos pela posição *curta* no *activo*; por outro lado, como em  $T$  o valor da aplicação  $Xe^{-r(T-t)}$  cresce para  $Xe^{-r(T-T)} = X$ , podemos assegurar que o *Portfolio A* valerá zero, se  $S \geq X$ , ou  $X - S$ , se  $S < X$ .

Se  $c > S$ , também um *ganho*, sem riscos, pode ser conseguido adquirindo o *activo* e vendendo a Opção Call associada.

Se a Opção Call for exercida, qualquer que seja o momento do exercício, far-se-á a entrega do *activo*, antecipadamente adquirido, e receber-se-á o valor  $X$ . Se a Opção não for exercida, preserva-se o *activo*, cujo valor jamais será negativo. Em ambas as hipóteses é manifesto o benefício da estratégia.

Q.E.D.

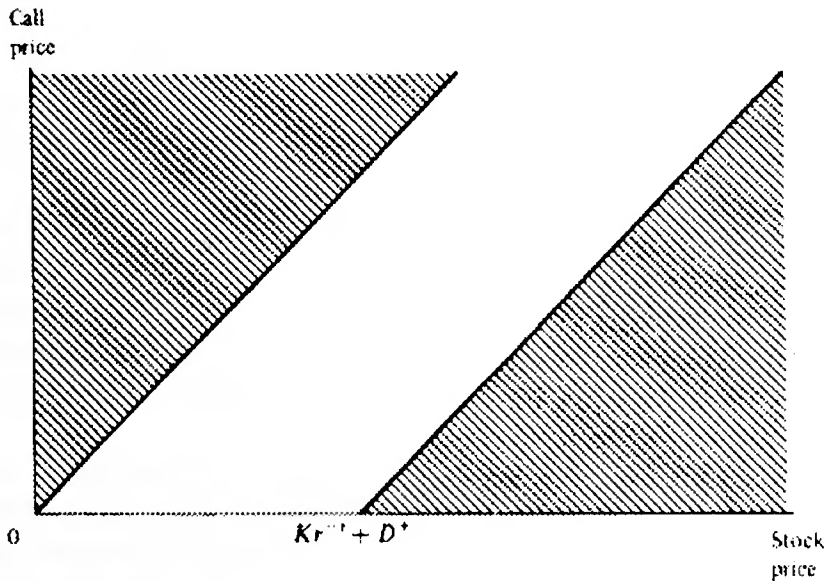
A Proposição 1 permite ainda formular conclusões ácerca dos valores extremos das Opções.

Assim, se  $S = 0$ , então, da referida Proposição obtém-se a desigualdade,  $0 \geq c \geq 0$ , a qual, necessariamente, implica  $c = 0$ . Ou seja,  $S = 0 \Rightarrow c = 0$ . Identicamente, se  $X = 0$ , então, da mesma Proposição, resulta que  $S \geq c \geq S$ , donde  $c = S$ . Dito de outra maneira,  $X = 0 \Rightarrow c = S$ .

---

<sup>(22)</sup> Esta estratégia não é, obviamente, aplicável a Opções do tipo Europeu, sendo assim possível que o valor de uma Call Europeia verifique a condição  $c < S - X$ .

A **Figura 1-1** resume graficamente a Proposição 1. Nela se expressa o valor da Opção Call em função do *preço corrente do activo*. A área não sombreada define o conjunto de pontos do tipo  $(c(t, S(t)), S(t))$  que satisfazem o resultado enunciado.



**Figura 1-1** Valor de uma Opção Call em função do preço da Acção

## PROPOSIÇÃO 2.

a).

$$c(X_1) \geq c(X_2) \quad \text{se } X_2 > X_1,$$

isto é, quanto maior for o preço de exercício, menor será o valor da Opção Call associada.

b).

$$c(X_1) - c(X_2) \leq X_2 - X_1 \quad \text{se } X_2 > X_1,$$

isto é, a diferença entre os valores de duas Opções Call, pertencentes a uma mesma classe, nunca excede a diferença entre os respectivos preços de exercício.

c).

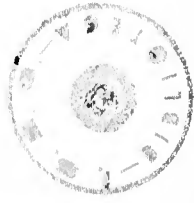
$$c(X_2) \leq \left( \frac{X_3 - X_2}{X_3 - X_1} \right) c(X_1) + \left( \frac{X_2 - X_1}{X_3 - X_1} \right) c(X_3) \quad \text{se } X_1 < X_2 < X_3,$$

isto é, o valor de um contrato de Opção Call com preço de exercício *intermédio* relativamente ao preço de exercício de duas outras Calls,

pertencentes a uma mesma *classe*, nunca excede a soma ponderada destas últimas.

Dem.

[vd. Apêndice A]



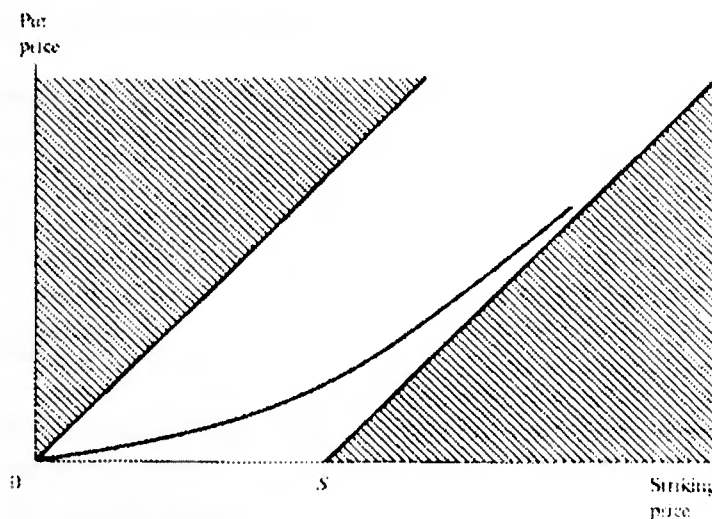
Se as condições a). e b). parecem ser razoavelmente perceptíveis, a condição c)., pelo contrário, afigura-se pouco intuitiva. A sua expressão reflecte, no entanto, um resultado bastante importante.

Ela traduz a seguinte ideia: se o preço de exercício de uma Opção Call for baixo, relativamente ao preço do *activo*, então, a Opção será quase certamente exercida, donde resulta que o acréscimo de uma unidade monetária no preço de exercício, irá repercutir-se de modo significativo no valor da própria Opção.

Pelo contrário, quanto mais elevado for o preço do exercício relativamente ao preço do *activo*, mais improvável será o exercício da Opção, daí resultando que um incremento no preço de exercício pouco afectará o valor da mesma Opção.

A **Figura 1-2** ilustra a Proposição 2, expressando o valor da Opção *Call* em função do *preço do exercício*. A área não sombreada define o conjunto de pontos,  $(c(X), X)$ , que verificam a proposição.

De facto, a condição a). combinada com a circunstância de  $c = S$  quando  $X = 0$ , delimita a região sombreada superiormente. Quanto à região sombreada inferiormente ela é determinada pela condição b)., a qual garante que o declive do gráfico não pode ser inferior a -1. Por fim, as condições a). e c). estabelecem a curva definida na figura.



**Figura 1-2** Valor de uma Opção Call em função do preço do Exercício

**PROPOSIÇÃO 3.**

$$c(t_2) \geq c(t_1) \quad \text{se } t_2 > t_1,$$

isto é, o valor de uma Opção Call é tanto maior quanto mais dilatado for o prazo do seu vencimento.

Dem.

Admitamos como verdadeira a condição contrária àquela que é expressa na Proposição 3., ou seja que,  $c(t_2) < c(t_1)$  para  $t_2 > t_1$ .

Considere-se a estratégia negocial que consiste na compra da Opção  $c(t_2)$  e na subscrição/venda da Opção Call  $c(t_1)$ .

Suponhamos que a Opção  $c(t_1)$  expira ou que é exercida quando ainda estamos a um instante  $t'$  do vencimento da Opção  $c(t_2)$  sendo o preço do activo associado igual a  $S'$ .

O valor da posição global no instante  $t'$  será, obviamente, igual a  $c(t') - \max[0, S' - X]$ .

Assim, se o valor da diferença  $c(t') - \max[0, S' - X]$  for positivo, então, bastará vender a Opção  $c(t_2)$ , para fechar a posição com ganho.

Se, pelo contrário, o valor de  $c(t') - \max[0, S' - X]$  for negativo, então deverá exercer-se imediatamente a Opção adquirida, recebendo-se um valor que é igual ao  $\max[0, S' - X]$ , o que *anula* a posição global, isto é, sem ganho nem perda.

A estratégia acima indicada pode, pois, ser considerada uma *Riskless Arbitrage Opportunity*. A sua existência é quanto basta para se poder negar a hipótese inicial e, por redução ao absurdo, confirmar a Proposição 3.

Q.E.D.

**PROPOSIÇÃO 4.**

a). Uma Opção Call não deve ser exercida antes da data de expiração, excepção feita aos momentos imediatamente anteriores ao pagamento de dividendos.

b). Se o valor actualizado do montante máximo dos dividendos a serem pagos por um activo associado a uma Opção até à sua extinção, for inferior ao valor actualizado dos juros que resultam da aplicação do valor correspondente ao preço de exercício a ser pago, então a Opção Call não deve ser exercida até à data de expiração.

c). Se num determinado momento for benéfico o exercício da Opção Call, então nunca será adequado deixar de exercer uma outra Opção idêntica que possua uma de duas características: ou um preço de exercício mais baixo; ou um tempo de expiração mais curto.

Dem.

[Demonstração em COX, RUBINSTEIN., Options Markets, p.140]

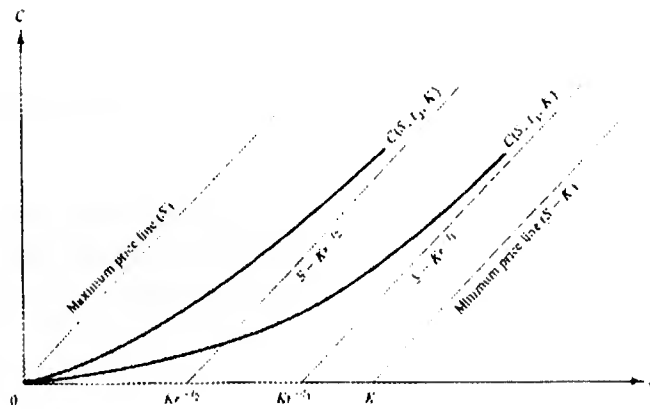


Figura 1-3 Diagrama Valor da Call-Preço da Acção

#### 4.2- Limites *superior* e *inferior* dos valores dos contratos de Opções Put.

De forma idêntica é possível determinar relações equivalentes para o caso das Opções Put. Enunciá-las-emos de seguida, mas não as demonstraremos.

#### PROPOSIÇÃO 5.

$$X > p > \max[0, X - S, D + Xe^{-r(T-t)} - S].$$

Dem.

[Demonstração em COX, RUBINSTEIN., Options Markets, p.145]

**PROPOSIÇÃO 6.**

a).

$$p(X_2) \geq p(X_1) \quad \text{se } X_2 > X_1,$$

isto é, quanto maior for o preço de exercício, maior será o valor da Opção Put associada.

b).

$$p(X_2) - p(X_1) \leq X_2 - X_1 \quad \text{se } X_2 > X_1,$$

isto é, a diferença entre os valores de duas Opções Put, pertencentes a uma mesma classe, nunca excede a diferença entre os respectivos preços de exercício.

c).

$$p(X_2) \leq \left( \frac{X_3 - X_2}{X_3 - X_1} \right) p(X_1) + \left( \frac{X_2 - X_1}{X_3 - X_1} \right) p(X_3) \quad \text{se } X_1 < X_2 < X_3,$$

isto é, o valor de uma Opção Put com preço de exercício intermédio relativamente ao preço de exercício de duas outras Opções Put, pertencentes a uma mesma classe, nunca excede a soma ponderada destas últimas.

Dem.

[Demonstração em COX, RUBINSTEIN, Options Markets, p.145]

**PROPOSIÇÃO 7.**

$$p(t_2) \geq p(t_1) \quad \text{se } t_2 > t_1,$$

isto é, o valor de uma Opção Put é tanto maior quanto mais dilatado for o prazo do seu vencimento.

Dem.

[Demonstração em COX, RUBINSTEIN., Options Markets, p.146]

**PROPOSIÇÃO 8.**

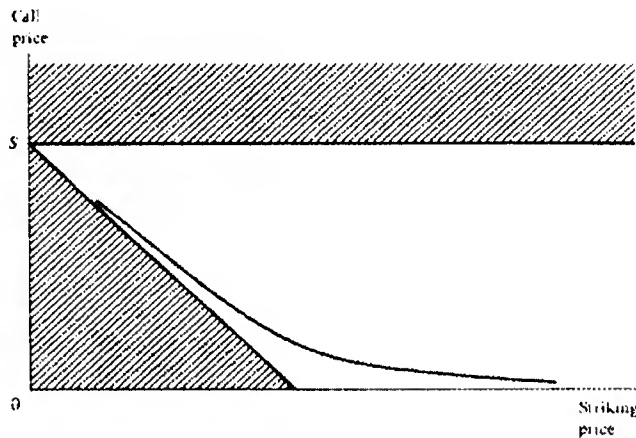
a). Se o valor actualizado dos dividendos mínimos a serem pagos no período que resta de vigência da Opção, exceder o valor dos juros actualizados resultantes da aplicação, por igual período de tempo, de

um montante igual ao valor do preço de exercício a ser recebido, então a Opção Put não deve ser exercida antes da sua expiração.

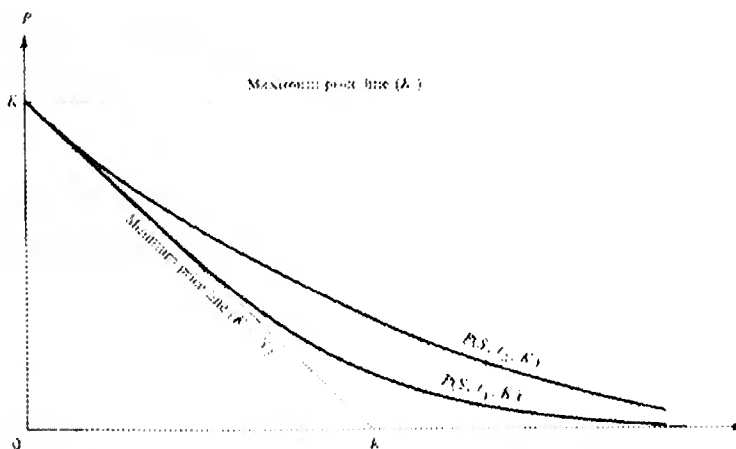
b). Se num determinado momento da sua vigência resultar óptimo o exercício da Opção Put, então nunca deverá deixar de se exercer uma outra Opção idêntica que possua, pelo menos, uma das duas seguintes qualidades: ou um preço de exercício mais elevado; ou um tempo de expiração mais curto.

Dem.

[Demonstração em COX, RUBINSTEIN., Options Markets, p.147]



**Figura 1-4** Valor de uma Opção Put em função do preço do Exercício



**Figura 1-5** Diagrama Valor da Put-Preço da Ação



## 5. RELAÇÕES ENTRE OPÇÕES EUROPEIAS E OPÇÕES AMERICANAS<sup>(23)</sup>

### PROPOSIÇÃO 9.

- a)<sup>(24)</sup> .  $C = c$ ;  
 b)<sup>(25)</sup> .  $P > p$  , se  $r > 0$  .

Dem.

Prova-se que  $C = c$  , demonstrando não ser óptima - qualquer que seja a circunstância - a estratégia de *antecipar* o exercício de uma Opção Call Americana.

Considerem-se, para o efeito, os *Portfolios*:

*Portfolio B*: Uma Opção Call Americana mais uma quantia em dinheiro no valor de  $Xe^{-r(T-t)}$ ;

*Portfolio C*: O activo associado à Opção.

(A) Caso se antecipe para um momento  $\tau < T$  o exercício da Opção Call, o valor do *Portfolio B* será:

$$S(\tau) - X + Xe^{-r(T-\tau)} . \quad (1.1)$$

Ora, o valor de (1.1) é sempre inferior a  $S_\tau$ , qualquer que seja  $\tau < T$ , se  $r > 0$ .

Pode, assim, concluir-se que o *Portfolio B* possui valor inferior ao valor do *Portfolio C*, caso se proceda ao exercício antecipado da Opção.

(B) Caso se não antecipe o exercício da Opção, o valor do *Portfolio B*, à data de expiração  $T$ , será:

$$\max(S_T, X) .$$

(23) Opções sobre activos que não prevêem o pagamento de dividendos.

(24) "... it is never optimal to exercise an American Call on a non-dividend paying stock early.", HULL J.C., "Options, Futures and Other Derivative Securities", 2nd Ed., p. 158.

(25) "It can be optimal to exercise an American Put on a non-dividend paying stock early.", Autor e ob. cit. nota 24, p. 160.

Sendo o valor do *Portfolio C*, no momento  $T$ ,  $S_T$ , poder-se-á dizer, então, que o *Portfolio B* é tão ou mais valioso do que o *Portfolio C*, por não ser de excluir a hipótese de  $S_T < X$ .

De (A) e de (B), conclui-se que uma Opção Call Americana (on a non-dividend-paying stock) não deve ser antecipada. (1.2)

Por outro lado, se se pensar que uma Opção Call Americana dispõe, na *pior hipótese*, das mesmas oportunidades de exercício que toda a Opção Call Europeia homóloga, então

$$C \geq c. \quad (1.3)$$

De (1.2) e (1.3), conclui-se, finalmente, que

$$C = c.$$

Prova-se que  $P > p$ , demonstrando que pode ser óptima<sup>(26)</sup> a estratégia de *antecipar* o exercício de uma Opção Put Americana.

Considerem-se, para o efeito, os seguintes *Portfolios* :

*Portfolio D*: Uma Opção Put Americana mais o activo associado;

*Portfolio E*: quantia em dinheiro no valor de  $Xe^{-r(T-\tau)}$ ;

(A) Caso se antecipe o exercício da Opção Put para um momento  $\tau < T$ , então os valores dos *Portfolio D* e *Portfolio E* serão, respectivamente, pelo menos  $X$  e  $Xe^{-r(T-\tau)}$ .

Como

$$Xe^{-r(T-\tau)} < X$$

qualquer que seja o  $\tau < T$  e  $r > 0$ , conclui-se, então, que o valor do *Portfolio D* é superior ao valor do *Portfolio E*.

(B) Caso não se antecipe o exercício da Opção, o valor do *Portfolio D*, à data de expiração  $T$ , será  $\max[X, S_T]$ , sendo  $X$  o valor do *Portfolio E*.

Pode, então, dizer-se que o *Portfolio D* é tão ou mais valioso do que o *Portfolio E*, por não ser de excluir a hipótese de  $S_T > X$ .

(26) "...at any given time during its life, a put option (on a non-dividend-paying stock) should always be exercised early if it is sufficiently deeply in the money.", Autor e ob. cit. nota 24, p.160.

Assim sendo, de (A) e (B) é possível concluir que uma Opção Put Americana (on a non-dividend-paying stock) pode, e em determinadas circunstâncias deve, ser antecipada.

Se se acrescentar o facto de uma Opção Americana dispôr, no *pior caso*, das mesmas oportunidades de exercício que toda a Opção Put Europeia homóloga, então, conclui-se que,

$$P \geq p .$$

Q.E.D.

## 6. RELAÇÃO DE PARIDADE CALL-PUT (CALL-PUT PARITY)

Os valores de uma Opção Call e de uma Opção Put, ambas Europeias, incidindo sobre um mesmo *activo*, com igual preço de exercício e idêntica data de expiração, são susceptíveis de serem relacionados de maneira única segundo a expressão:

### PROPOSIÇÃO 10.

$$c = p + S - Ke^{-r(T-t)},$$

isto é, o valor de uma *payout-protected European Call*<sup>(27)</sup> é igual à diferença entre o valor resultante da soma da Opção Put homóloga com o preço de mercado do *activo* associado e o valor "actualizado" do preço de exercício.

Dem.

Considerem-se os seguintes *Portfolios*:

*Portfolio F*: Uma Opção Call Europeia mais uma aplicação activa no valor de  $Xe^{-r(T-t)}$ ;

*Portfolio G*: Uma Opção Put Europeia mais o *activo* associado.

Como qualquer das Opções - sendo Europeias - não pode ser antecipada e, dado que em  $T$ , ambos os *Portfolios* valem

$$\max(S_T, X)$$

então, os seus valores são iguais, o que significa

<sup>(27)</sup> Uma Opção diz-se *Payout - Protected* se o seu valor for *indiferente* ao pagamento de dividendos, normalmente porque a existência dos mesmos não é considerada. Caso contrário, a Opção diz-se *Unprotected*.



$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + S$$

ou, o que é equivalente,

$$c = p + S - Xe^{-r(T-t)} .$$

Q.E.D.

Por outro lado, e recordando que,

$D$  = Valor certo<sup>(28)</sup> dos *dividendos* a serem pagos,

então, é possível escrever para Opções Europeias *payout-unprotected*, um resultado equivalente ao expresso na Proposição anterior.

### PROPOSIÇÃO 11<sup>(29)</sup>

$$c = p + S - D - Xe^{-r(T-t)} .$$

As relações de paridade Call - Put expressas nas Proposições 10 e 11, são válidas somente para Opções de tipo Europeu.

Contudo, é possível estabelecer relações *aproximadas* entre os valores correspondentes de Opções do tipo Americano. Fá-lo-emos primeiro em relação a Opções Americanas *payout-protected* na Proposição 12, e só depois em relação a Opções Americanas *payout-unprotected* na Proposição 13.

### PROPOSIÇÃO 12.

$$P + S - Xe^{-r(T-t)} > C > P + S - X .$$

Dem.

Da Proposição 9. alínea b). sabe-se que

$$P > p$$

<sup>(28)</sup> No caso de *incerteza* quanto ao valor dos "dividendos" a serem pagos considera-se:

-  $D^+$  = Valor *esperado* máximo de "dividendos" a pagar;

-  $D^-$  = Valor *esperado* mínimo de "dividendos" a pagar.

<sup>(29)</sup> No caso de *incerteza* quanto ao valor dos "dividendos" a serem pagos, a Proposição 11 deve ser reescrita, apresentando-se sob a forma da seguinte desigualdade:

$$p + S - Xe^{-r(T-t)} - D^+ \leq c \leq p + S - Xe^{-r(T-t)} - D^- .$$

logo, da Proposição 10. resulta

$$P > c - S + Xe^{-r(T-t)}.$$

Como da Proposição 9. alínea a) também se sabe que,

$$c = C$$

então conclui-se que,

$$P > C - S + Xe^{-r(T-t)}$$

ou, o que é equivalente, que

$$C < P + S - Xe^{-r(T-t)}. \quad (1.4)$$

Consideremos, por outro lado, os seguintes *Portfolios*<sup>(30)</sup>:

*Portfolio H*: Uma Opção Call Europeia mais uma quantia em dinheiro no valor de X;

*Portfolio I*: Uma Opção Put Americana mais o activo associado.

(A) Em T, o *Portfolio I* possui valor

$$\max(S_T, X)$$

e o *Portfolio H* valor

$$\max(S_T, X) + Xe^{r(T-t)} - X$$

donde se conclui que, em T, o valor do *Portfolio H* é superior ao valor do *Portfolio I*.

(B) Em  $\tau < T$ , caso a Opção Put Americana tenha sido exercida antecipadamente, o *Portfolio I* possui, pelo menos, valor X - a não ser assim, a Opção Put não teria sido antecipada - e o *Portfolio H* vale  $Xe^{r(\tau-t)}$ .

Assim sendo, conclui-se que também para um instante  $\tau < T$ , o valor do *Portfolio H* supera o valor do *Portfolio I*.

De (A) e (B) é, finalmente, possível estabelecer que

<sup>(30)</sup> Assume-se que ambas as Opções possuem idêntico preço de exercício e igual data de expiração; admite-se ainda ter sido investida a quantia X em dinheiro, à taxa de risco r.

$$c + X > P + S.$$

Ora, como da Proposição 9. alínea a) se sabe que,

$$c = C$$

então, também,

$$C + X > P + S,$$

ou seja,

$$C > P + S - X. \quad (1.5)$$

Por fim, de (1.4) e (1.5) conclui-se

$$P + S - Xe^{-r(T-t)} > C > P + S - X.$$

Q.E.D.

### PROPOSIÇÃO 13.

$$P + S - Xe^{-r(T-t)} > C > P + S - X - D.$$

Dem.

Considerem-se os seguintes *Portfolios*:

*Portfolio J*: Uma Opção Call Europeia mais uma quantia em dinheiro no valor de  $X + D$ ;

*Portfolio K*: Uma Opção Put Americana mais o activo associado.

As razões aduzidas a favor da demonstração da Proposição 12. permitem afirmar, por maioria de razão, ser o valor do *Portfolio J* superior ao valor do *Portfolio K*, pelo que

$$P + S < c + X + D.$$

Como o valor de uma Call Europeia nunca é superior ao valor de uma Call Americana, ou seja, como

$$c \leq C,$$

logo também

$$P + S < C + X + D,$$

o que prova a 1.<sup>a</sup> desigualdade

$$C > P + S - D - X.$$

A 2.<sup>a</sup> desigualdade foi já demonstrada na Proposição 12. para Opções Americanas *payout-protected*, mantendo-se válida para Opções Americanas *payout-unprotected*.

De facto, sendo verdadeira a relação

$$C - P < S - Xe^{-r(T-t)},$$

de acordo com a Proposição 12., então, a mesma relação manter-se-á válida se se considerar uma situação de pagamento de *dividendos*, bastando, para o efeito, recordar o raciocínio exposto em 3.6.

## 7. ESTRATÉGIAS NEGOCIAIS ENVOLVENDO OPÇÕES

### 7.1- *Payoff diagrams* em estratégias elementares não protegidas.

Procederemos, de seguida, à análise das consequências resultantes da adopção de algumas particulares estratégias negociais envolvendo quer as Opções, quer o próprio activo a elas associado. Cada uma delas será, por agora, considerada isoladamente.

Começaremos pelas mais simples ou elementares, asdenominadas *estratégias não protegidas* (ou *não cobertas*).

Utilizaremos, para tanto, *payoff diagrams* cuja função é a de estabelecer a relação entre o *ganho* decorrente da adopção de cada uma das estratégias e o preço de mercado do *activo* associado à data da sua extinção.

São seis as estratégias elementares *não protegidas*. A saber:

- 1.- Posição *longa* no *activo* <sup>(31)</sup> ;
- 2.- Posição *curta* no *activo* <sup>(32)</sup> ;
- 3.- *Compra* de uma Opção *Call* <sup>(33)</sup> ;
- 4.- *Subscrição* de uma Opção *Call*;
- 5.- *Compra* de uma Opção *Put*;

<sup>(31)</sup> Ou posição *provisionada*, a que corresponde, na prática, a compra do *activo*.

<sup>(32)</sup> Ou posição *descoberta*, a que corresponde, na prática, a venda do *activo*.

<sup>(33)</sup> Ou posição *coberta* na Opção *Call*.

## 6.- Subscrição de uma Opção Put.

De cada uma das estratégias apresentaremos o correspondente *payoff diagram* [vd. Figuras 1-1 a 1-6].

Da sua leitura - e sem outros comentários -, é de destacar que possuindo uma posição *longa* numa qualquer Opção (Call ou Put), um investidor limita as suas possibilidades de *perda*, mantendo possibilidades de *ganho* idênticas àquelas de que beneficiaria se, ao invés, detivesse posição homóloga<sup>(34)</sup> no *activo*.

Ocorre o inverso quando um investidor detém uma posição *curta* na Opção.

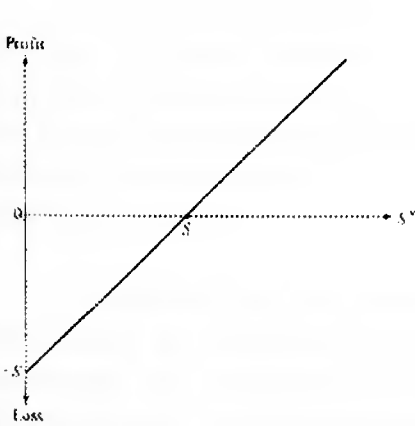
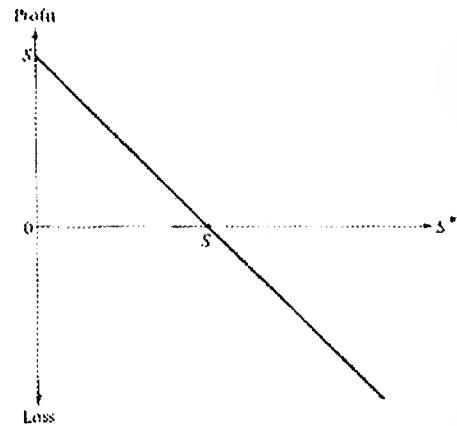
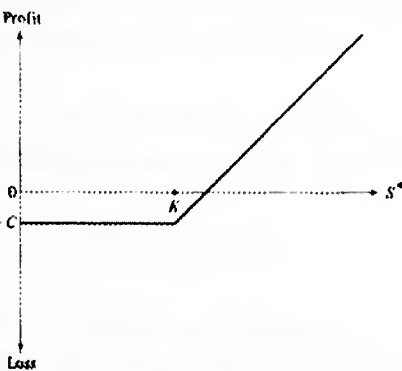
Figura 1-6 Posição *longa* na AcçãoFigura 1-7 Posição *curta* na Acção

Figura 1-8 Compra de uma Call

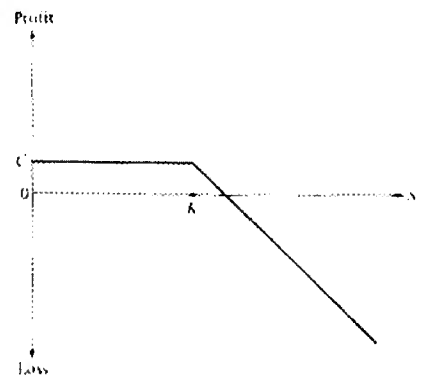


Figura 1-9 Subscrição de uma Call

(34) Isto é, uma posição *coberta* no *activo* relativamente às Opções Call, e uma posição *curta* no *activo* em relação às Opções Put.



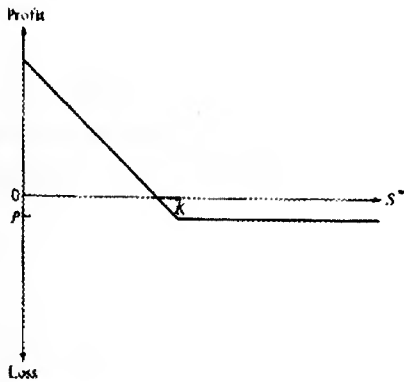


Figura 1-10 Compra de uma Put

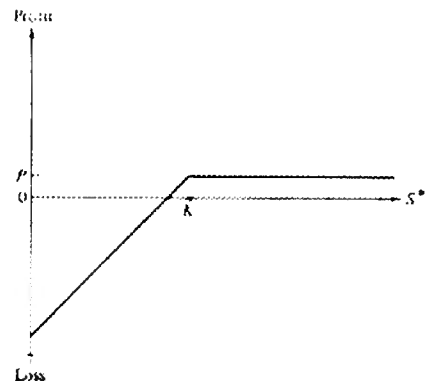


Figura 1-11 Subscrição de uma Put

## 7.2. *Payoff diagrams* em estratégias elementares protegidas<sup>(35)</sup>.

A enorme flexibilidade negocial proporcionada, em regra, pelas Opções, torna-se ainda mais evidente quando são consideradas *posições negociais combinadas*, tais como: a *subscrição* de uma Opção Call contra uma posição *coberta* no activo associado; ou a *subscrição* e *compra*, simultâneas, de diferentes Opções Call, todas sobre um mesmo activo.

A análise que se segue - aplicada inicialmente a estratégias do tipo *hedge* e, adiante, a toda a tipologia de estratégias *protegidas* - baseia-se na sobreposição dos *payoff diagrams* de cada uma das componentes, individualmente consideradas, dessa mesma estratégia.

Assim, a "linha payoff" da posição combinada será determinada - para cada possível valor,  $S^*$ , do activo à data de expiração - adicionando as distâncias verticais de cada uma das linhas payoff tomadas individualmente.

Avancemos, pois, com a identificação de algumas dessas estratégias negociais. Assim,

### DEFINIÇÃO 7:

Chama-se **Hedge** (cobertura) à estratégia negocial que combina uma ou mais Opções sobre um determinado activo com o próprio activo, de tal modo que as duas posições exerçam, uma relativamente à outra, mútua protecção face a eventuais perdas.

<sup>(35)</sup> "Hedges, Spreads, and Combinations are types of covered positions, in which one or more securities protect the returns of one or more other securities, all related to the same underlying stock.", Autores e ob. cit. nota 2, p.8.

Mais especificamente, uma estratégia do tipo *hedge* consiste na combinação de uma posição *longa* no *activo* com a *subscrição* de uma Opção Call, ou, alternativamente, com a *compra* de uma Opção Put.

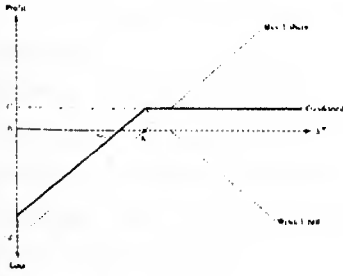


Figura 1-12 1:1 Hedge ( $S=X$ )

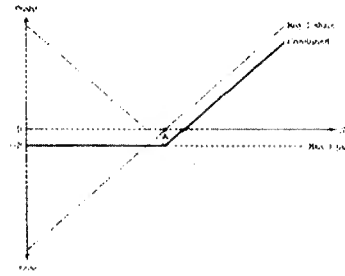


Figura 1-13 1:1 Hedge ( $S=X$ )

No mesmo sentido, uma estratégia de *cobertura inversa* - *reverse hedge* - combina uma posição *curta* no *activo* com a *compra* de uma Opção Call ou com a *subscrição* de uma Opção Put [vd. Figuras 1-9 e 1-12].

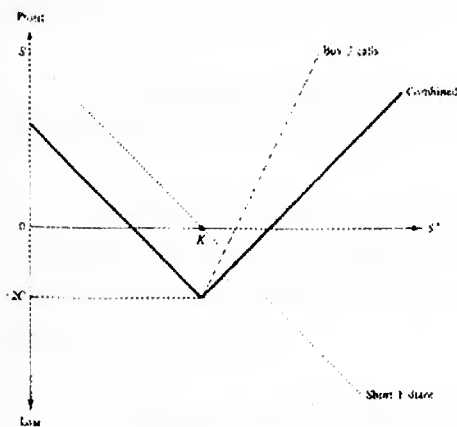


Figura 1-14 2:1 Reverse Hedge

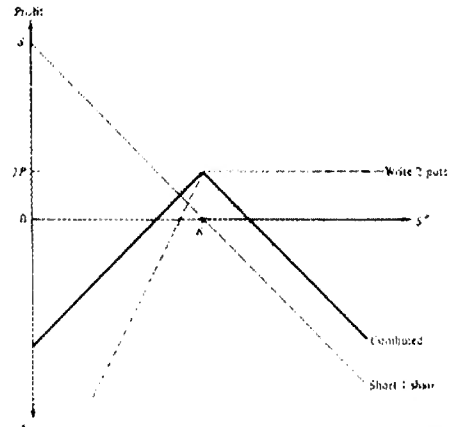


Figura 1-15 2:1 Reverse Hedge

A mais popular estratégia de entre as do tipo *hedge*, consiste na subscrição de uma Opção Call por cada título que se possua do respectivo *activo*.

Uma observação atenta das Figuras 1-6 e 1-7 relativas, respectivamente, à subscrição de uma Opção Put, e à subscrição de uma Opção Call e compra do *activo* associado, confirma, graficamente, uma relação já conhecida e anteriormente demonstrada, na qual se relacionam os valores de uma Opção Call e de uma Opção Put [vd. 5].

Variações da estratégia padrão tipo *hedge* (*reverse hedge*) "um para um" são igualmente possíveis. É o caso da Figura 1-8, onde se

combina a subscrição de duas Opções Call por cada *activo* possuído. Estratégias deste tipo - ditas de *payoff triangle* - permitem ganho enquanto os *activos* associados não assumirem valores extremos em ambas as direcções, isto é, aumentando ou diminuindo desmesuradamente.

Assim, quando por mera intuição ou conhecimento efectivo, um investidor é confrontado com um facto novo susceptível de alterar, de forma substancial, o valor corrente de um *activo*, desconhecendo, contudo, o exacto sentido em que a aludida alteração se irá repercutir, então deverá adoptar, por exemplo, uma estratégia do tipo "reverse hedge", adquirindo duas Opções Call por cada título vendido do *activo* [Vd. Figura 1-9].

Analisaremos, seguidamente, um outro tipo de estratégias protegidas.

### DEFINIÇÃO 8:

Chama-se **Spread** (*cobertura extensão*) à estratégia negocial que combina Opções da mesma *classe* e diferentes *séries*, sendo umas subscritas e outras compradas.

Distinguem-se três tipos de estratégias negociais do tipo Spread: *Spread Verticais*; *Horizontais*; e *Diagonais*<sup>(36)</sup>.

Referimo-nos a estratégias negociais do tipo **Spread Verticais** quando se adquire uma Opção e se vende outra, ambas sobre o mesmo *activo*, com idêntica data de expiração, mas a preços de exercício distintos.

Falamos de **Spread Horizontais**<sup>(37)</sup> referindo-nos a estratégias que envolvem a compra de uma Opção e a venda de outra, as duas sobre o mesmo *activo*, com igual preço de exercício, mas diferentes datas de expiração.

Chamamos **Spread Diagonais** às estratégias que envolvem a aquisição de uma Opção e venda de outra, ambas sobre um *activo* comum, mas com datas de expiração e preços de exercício distintos.

Cada *Spread* admite duas versões alternativas: a *Bullish* (ou voluntarista), e a *Bearish* (ou conservadora).

<sup>(36)</sup> "The terms vertical, horizontal and diagonal arise from the format for listing put and call prices in the newspaper.", Autores e ob. cit. nota 2, p.13.

<sup>(37)</sup> A circunstância de não possuírem idêntica data de expiração inviabiliza o esboço dos correspondentes payoff diagrams.

Consideramos que uma estratégia do tipo *Spread Vertical* é **Bullish** [vd. Figuras 1-13 e 1-16] se a Opção adquirida - de entre as duas Opções em causa - fôr, justamente, aquela que possui um preço de exercício mais elevado.

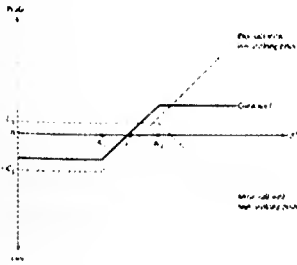


Figura 1-16 Bullish Vertical Spread

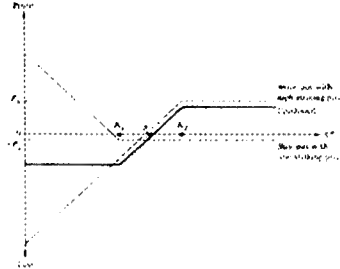


Figura 1-17 Bullish Vertical Spread

De forma análoga, uma estratégia *Spread Horizontal* diz-se **Bullish** se a Opção adquirida fôr aquela que possui maior prazo de expiração.

Por último, identifica-se uma estratégia *Spread Diagonal Bullish* como sendo aquela cuja Opção adquirida apresenta quer um maior prazo de expiração, quer um preço de exercício mais elevado.

Por exclusão de partes, consideram-se estratégias negociais do tipo *Spread Bearish* todas aquelas que revelam características opostas às que são atribuídas às **Bullish** [vd. Figuras 1-14 e 1-17].

Poderia inferir-se das designações adoptadas que as estratégias *Spread Bullish* beneficiariam sempre de um aumento do preço do activo, observando-se o contrário no caso das estratégias *Spread Bearish*. Tal nem sempre acontece, em especial, tratando-se de estratégias *Spread Horizontais* ou *Diagonais*.

Verifica-se ainda que - ignorados outros custos administrativos próprios da burocracia da negociação - todas as estratégias *Spread Bullish* para Opções Call obrigam a um desembolso inicial (*cash-outflow*), observando-se, no caso das estratégias bearish, um encaixe inicial (*cash-inflow*). Este é o motivo pelo qual as primeiras estratégias são também conhecidas por *purchased Spreads* e as segundas por *written Spreads*.

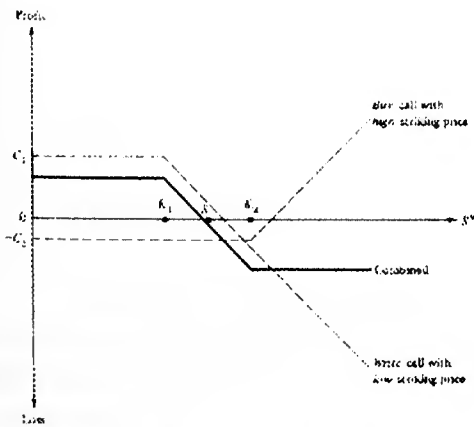


Figura 1-18 Bearish Vertical Spread

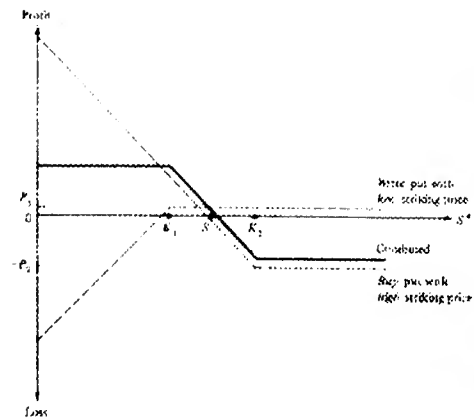


Figura 1-19 Bearish Vertical Spread

A desvantagem na adopção destas designações decorre da circunstância de suceder o contrário no caso das Opções Put. De facto, sendo definidas sobre Opções *Put*, as estratégias *Spread Bullish* geram encaixe inicial, enquanto que as *Bearish* implicam desembolsos.

Uma variante das estratégias *Spread* combina a compra (subscrição) de duas Opções "intermédias" - quer quanto à data de vencimento, quer quanto ao valor do preço de exercício -, com a subscrição (compra) de duas outras Opções "extremas" relativamente aos mesmos parâmetros, e todas sobre o mesmo activo. A esta variante damos o nome de **Butterfly Spread**<sup>(38)</sup> (*extensão borboleta*) [vd. Figuras 1-15 e 1-18].

Em qualquer das suas versões - isto é, tanto para Opções Call como para Opções Put -, observa-se um pequeno ganho sempre que o preço do activo assuma valores próximos dos que são conhecidos para os preços de exercício das Opções subscritas. [vd. Figuras 1-15 e 1-16]

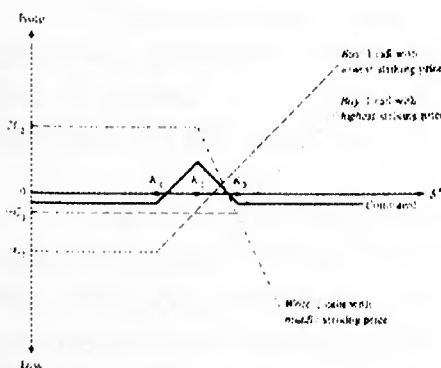


Figura 1-20 Butterfly Spread

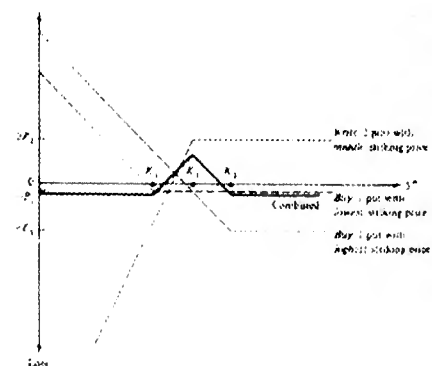


Figura 1-21 Butterfly Spread

(38) "A Butterfly Spread does not qualify as an "elementary" position because it can be interpreted as a portfolio of a bearish and bullish vertical spread, or a portfolio of a bearish and bullish horizontal spread.", Autores e ob. cit. nota 2, p.15.



Por fim,

### DEFINIÇÃO 9:

Chama-se **Combination** (Combinação) à estratégia negocial que envolve opções de diferente tipo/natureza - Opções Call ou Put - sobre um mesmo activo sendo que ou são ambas subscritas, ou são ambas compradas.

A estratégia negocial do tipo *Combination* mais usual, envolve uma Opção Call e outra Put, ambas sobre um mesmo activo, com idêntico preço de exercício e igual data de expiração. É conhecida por **Straddle** [vd. Figuras 1-19 e 1-22].

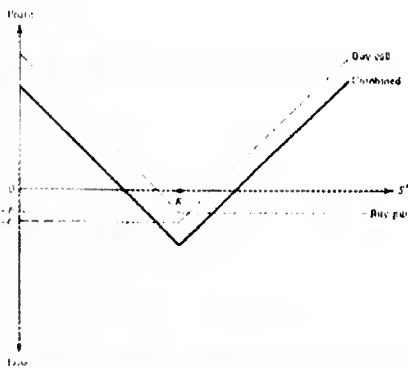


Figura 1-22 Bottom Straddle

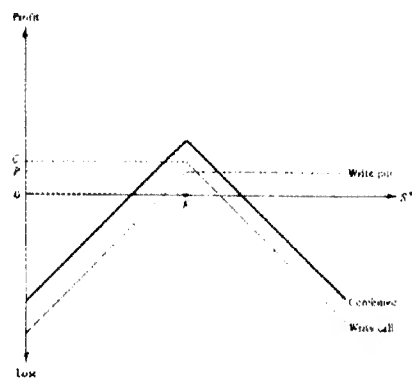


Figura 1-23 Top Straddle

Conhecem-se duas versões deste tipo de estratégia: elas dizem-se **Bottom** quando as Opções envolvidas são (todas) compradas [vd. Figuras 1-19, 1-20 e 1-21]; designam-se por **Top** quando as Opções em jogo são (todas) subscritas [vd. Figuras 1-22, 1-23 e 1-24].

As posições negociais *Bottom* são, geralmente, traduzidas por *payoff diagrams* de forma triangular com o vértice apontando para baixo em indicação do valor máximo da perda. As posições *Top* possuem também uma representação triangular em que o vértice, indicando o ganho máximo, aponta para cima.

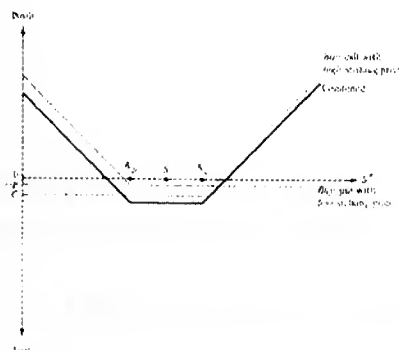


Figura 1-24 Bottom Vrt. Combination

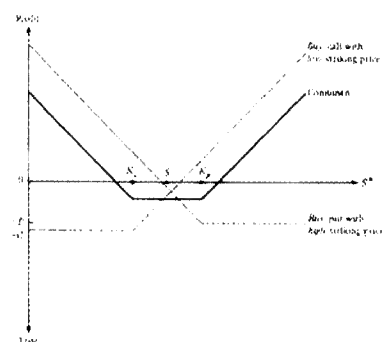


Figura 1-25 Bottom Vrt. Combination

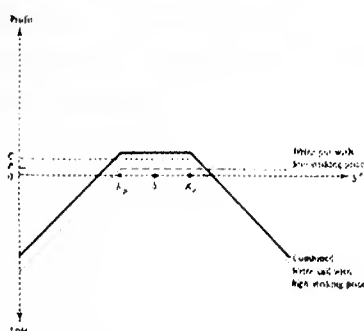


Figura 1-26 Top Vrt. Combination

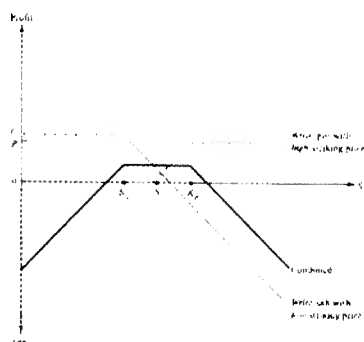


Figura 1-27 Top Vrt. Combination

## 8. CONCLUSÃO

Um dos desenvolvimentos mais interessantes ocorrido nos mercados financeiros nas últimas duas décadas, e que tem suscitado enorme adesão, é o da negociação, e conseqüente avaliação, dos chamados Produtos Derivados. De entre estes, as Opções são consideradas especialmente atractivas.

O vasto conjunto de estratégias negociais revelado anteriormente, consubstancia a ideia de que, não acedendo a instrumentos negociais do tipo das Opções, os investidores dificilmente poderiam expressar, com um mínimo de segurança, todos os seus característicos instintos negociais, perdendo os mercados financeiros muita da flexibilidade, diversidade, credibilidade e liquidez.

Com efeito, as Opções possuem um enorme potencial de dispersão do risco.

Para os *hedgers*, que as usam enquanto instrumentos de cobertura de risco; para os *especuladores*, que a elas recorrem como forma de potenciar os seus ganhos; para os *arbitrageurs*, os quais actuam nos mercados com o objectivo de beneficiar de eventuais

discrepâncias verificadas nos preços de um mesmo *activo*, em mercados distintos, num mesmo instante.

Mas obviamente, negociar bem pressupõe avaliar melhor.

O propósito do Capítulo II é o de estabelecer uma metodologia eficaz - porém, ainda incipiente -, de avaliação de Opções sobre produtos transaccionáveis que não prevêem o pagamento de dividendos. Trata-se do Modelo Binomial para a avaliação de Opções sobre Acções.



## CAPÍTULO II

### MODELO BINOMIAL

#### 1. INTRODUÇÃO

Estabeleceram-se no Capítulo I as condições gerais a serem satisfeitas pelo valor de uma Opção. Com excepção do valor da Opção na data de expiração, ficou, no entanto, por definir, para um qualquer outro momento, uma relação que envolva os restantes factores determinantes na avaliação da mesma.

Apresenta-se neste Capítulo um primeiro processo, visando a determinação do valor de uma qualquer Opção sobre um qualquer activo transaccionável - por exemplo, uma Acção - num dado instante da sua vida.

A análise que se segue, que é devida a Cox, Ross e Rubinstein<sup>(39)</sup>, apresenta a vantagem de clarificar o pressuposto fundamental, a ideia base, em que assenta a teoria geral da avaliação de Opções.

Tal pressuposto consiste no seguinte: combinando Opções com as próprios Acções a elas associadas, é sempre possível constituir *Portfolios* de títulos protegidos do risco. Isto é, *Portfolios* cuja taxa de rendibilidade iguala aquela que é proporcionada por uma taxa de risco-zero.

Começaremos por admitir que o preço da Acção associada à Opção possui um comportamento aleatório, definindo-o, neste Capítulo, em tempo e espaço de estados discretos.

---

(39) COX, J.C., ROSS, S.A., RUBINSTEIN, A. "Option Pricing: a simplified approach", Journal of Financial Economics 7 (1979) pp. 229-263.

Assim, admitamos que o preço da Acção associada à Opção evolui no tempo segundo o Modelo Binomial Multiplicativo. Dito de outra forma, suponhamos que:

- qualquer que seja o *período* de tempo considerado, existem somente duas possíveis ocorrências. A saber: ou o preço da Acção cresce, beneficiando de uma taxa  $r_u$ , ou decresce, à razão de uma taxa  $r_d$ .

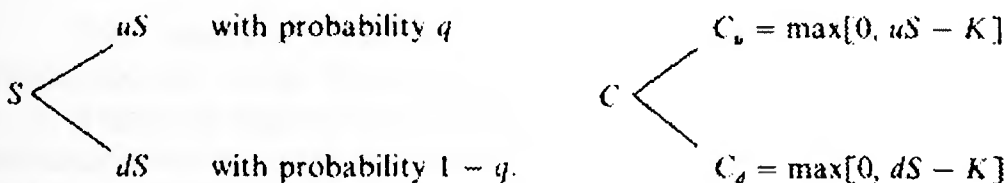
Isto é, ou o preço da Acção evolui para um valor do tipo  $u \times$  preço precedente da Acção ou, alternativamente, para um valor da forma  $d \times$  preço precedente da Acção, sendo as constantes multiplicativas  $u$  e  $d$  definidas por  $u = 1 + r_u$  e  $d = 1 + r_d$  onde, obviamente,  $r_u > r_d$ ;

- a probabilidade associada à primeira ocorrência considera-se igual a  $q$ , sendo a da segunda igual a  $(1 - q)$ ;

- qualquer que seja o *período* de tempo considerado, toda a ocorrência futura é independente de ocorrências pretéritas.

## 2. AVALIAÇÃO DE UMA OPÇÃO CALL EUROPEIA A UM PERÍODO SOBRE UMA ACÇÃO QUE NÃO PREVÊ PAGAMENTO DE DIVIDENDOS

Mantendo as notações anteriormente adoptadas, consideremos  $c$  o valor corrente (em  $t = 0$ ) de uma Opção Call Europeia;  $c_u$  e  $c_d$  os possíveis valores da mesma Opção no instante  $t = 1$ , consoante o preço da Acção evolua no sentido de  $uS$  ou no sentido de  $dS$ .



Em  $t = 1$  - data de expiração da Opção -  $c_u$  e  $c_d$  possuem valor igual ao *valor do exercício* da Opção Call, quer o preço da Acção tenha subido, caso em que  $c_u = \max[0, uS - X]$ , quer tenha descido, caso em que, pelo contrário,  $c_d = \max[0, dS - X]$ .

Pense-se de seguida, num *Portfolio* composto de forma a possibilitar a *réplica* do "payoff" da Opção Call no momento  $t = 1$ .

Suponha-se que o mesmo é constituído, por exemplo, por  $n_s$  títulos da Acção subjacente à Opção, e por um montante  $B$  aplicado em Obrigações da "dívida pública" a uma taxa  $r = R - 1$  de risco-zero.

Assim, se o preço da Acção aumentar, o *Portfolio* considerado possuirá, pelo menos, valor igual a  $n_s(uS) + BR$ ; sendo o seu valor igual a  $n_s(dS) + BR$  se, pelo contrário, o preço da Acção diminuir.

É agora possível determinar  $n_s$  e  $B$  exigindo que o valor do *Portfolio* iguale o valor da Opção Call, quer na hipótese em que esta se valoriza, situação em que o seu valor passará a ser  $c_u$ , quer no caso em que se desvaloriza, passando a valer  $c_d$ .

Façamos então:

$$\begin{cases} n_s(uS) + BR = c_u \\ n_s(dS) + BR = c_d \end{cases}$$

cujas soluções<sup>(40)</sup> são

$$\begin{cases} n_s = \frac{c_u - c_d}{S(u - d)} \\ B = \frac{1}{R} \left[ \frac{uc_d - dc_u}{u - d} \right] \end{cases}$$

Ora, estando excluída *à priori* a possibilidade do exercício antecipado da Opção (que, a ocorrer, teria que se verificar no instante  $t = 0$ ), à data de expiração (no instante  $t = 1$ ) o valor da Opção Call será necessariamente igual ao valor do *Portfolio* pois que, na hipótese contrária, Call e *Portfolio* estariam sujeitos a "Riskless Arbitrage Opportunities".

<sup>(40)</sup> Se  $B > 0$  teremos aplicações activas; se  $B < 0$  teremos aplicações passivas.  $n_s$  é designado por *rácio de cobertura*. O seu valor indica o número de Acções a serem adquiridos (vendidos) por cada Opção vendida (adquirida) de modo a constituir-se uma posição de risco-zero.

Assim sendo, façamos

$$c = n_s S + B$$

ou seja,

$$c = \frac{c_u - c_d}{u - d} + \frac{1}{R} \left[ \frac{uc_d - dc_u}{u - d} \right]$$

ou ainda, o que é equivalente,

$$c = \frac{1}{R} \left[ \frac{R - d}{u - d} c_u + \frac{u - R}{u - d} c_d \right]$$

expressão que define o valor de uma Opção Call sobre uma Acção a um-período.

Por outro lado, demonstra-se, através de prova<sup>(41)</sup> que aqui se omite, que  $u > R > d$ .

Ora, a partir da relação anterior é possível concluir serem as grandezas  $\frac{R-d}{u-d}$  e  $\frac{u-R}{u-d}$  positivas e de soma unitária. Dito de outra forma, verificam-se as propriedades elementares da definição de Probabilidade.

Definam-se, então,

$$p = \frac{R-d}{u-d} \quad \text{e} \quad 1-p = \frac{u-R}{u-d}$$

como sendo as *probabilidades* de uma Opção Call evoluir, respectivamente, para os valores  $c_u$  e  $c_d$ .

Dito isto, é possível reescrever a expressão que nos dá o valor de uma Opção Call <sup>(42)</sup> sobre uma Acção a

<sup>(41)</sup> "If these inequalities did not hold, there would be profitable riskless arbitrage opportunities involving only the stock and riskless borrowing and lending. For example, if  $u > d > R$ , an investor could make a certain profit on no investment by borrowing at  $R$  and buying the stock.", COX, J. e RUBINSTEIN, M., "Options Markets", p.171.

<sup>(42)</sup> Construção similar dá-nos o valor de uma Opção Put a um-período, que é a seguinte:

$$P = \frac{1}{R} [pP_u + (1-p)P_d]$$



um-período<sup>(43)</sup>, alternativamente, da maneira que se segue:

$$c = \frac{1}{R} [pc_u + (1-p)c_d].$$

Esta segunda expressão do valor de uma Opção Call revela duas particularidades interessantes. A saber:

- ela não depende de  $q$  e, logo, também não depende de  $(1-q)$  pelo que podem os investidores diferir na probabilidade que atribuem à evolução positiva, ou negativa, do preço da Acção no mercado e, ainda assim, concordarem na avaliação da Opção (Call/Put);

- em nenhum lado aparece identificada a particular *predisposição* dos investidores relativamente ao risco pelo que, distintas atitudes face ao mercado e ao risco, em nada influenciam uma idêntica "valoração" de uma mesma Opção.

Decorre deste último aspecto que todos os investidores, e particularmente os chamados *neutros* ou *indiferentes*<sup>(44)</sup> ao risco, podem determinar o valor de uma Opção (Call/Put) seguindo um raciocínio idêntico.

Dito de modo equivalente, estamos perante a assunção do princípio do risco-neutro (*risk neutral valuation*).

Ora, numa economia de risco-Neutro o valor esperado do rendimento, qualquer que seja o *activo transaccionável* considerado, iguala em valor, quaisquer que sejam as circunstâncias, a rendibilidade esperada, proporcionada pela taxa  $r$  de risco-zero.

No caso presente, tal pode ser dito do seguinte modo:

$$qr_u + (1-q)r_d = r$$

ou seja,

<sup>(43)</sup> Como adiante se verá, esta expressão é facilmente extrapolável para o caso de Opções a "N-períodos".

<sup>(44)</sup> Assim designados todos aqueles investidores cujo grau de aceitação de "risco" nos investimentos feitos não está dependente das "taxas" esperadas de "retorno" dos mesmos.

$$q(u-1) + (1-q)(d-1) = R-1$$

donde resulta

$$q = \frac{R-d}{u-d} \quad \text{e} \quad 1-q = \frac{u-R}{u-d},$$

podendo daqui concluir-se que, numa economia de risco-neutro,

$$q = p \quad \text{e} \quad 1-q = 1-p.$$

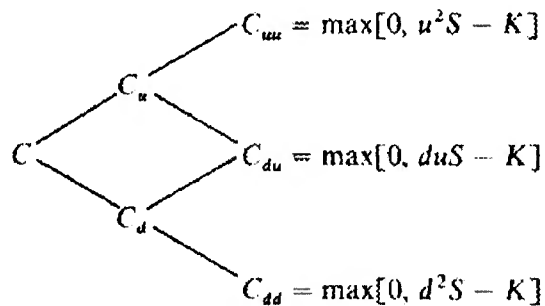
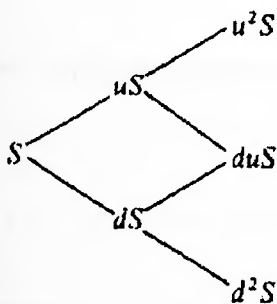
Como um investidor neutro ao risco avalia um qualquer *activo* a partir do valor esperado do seu "payoff" que, posteriormente, actualiza à taxa de "risco-zero", então poderemos concluir que esta metodologia conduz, no caso da avaliação de uma Opção Call, à seguinte igualdade

$$\frac{1}{r+1} [qc_u + (1-q)c_d] = \frac{1}{R} [pc_u + (1-p)c_d]$$

a cuja última expressão já antes havíamos chegado.

### 3. AVALIAÇÃO DE UMA OPÇÃO CALL EUROPEIA A DOIS PERÍODOS SOBRE UMA ACÇÃO QUE NÃO PREVÊ PAGAMENTO DE DIVIDENDOS

Tomando em consideração o que anteriormente se disse, adopte-se, na determinação do valor de uma Opção Call a *dois-períodos*, uma estratégia idêntica.



A referida estratégia preconiza, recorde-se, que se inicie o estudo a partir do momento terminal ou data de expiração da Opção, no caso

$t = 2$  e que, num processo gradualista, "retroactivo", *período a período*, se conduza o cálculo de  $c$  no sentido do instante inicial  $t = 0$ .

Na prática, fixado o *período* de  $t = 1$  a  $t = 2$  - situação que reproduz o estudo já feito para uma Opção Call a *um-período* -, duas relações podem ser extraídas [vd. Figura 2.2]:

$$c_u = \frac{1}{R} [p c_{uu} + (1-p) c_{ud}] \quad (2.1)$$

e

$$c_d = \frac{1}{R} [p c_{ud} + (1-p) c_{dd}]. \quad (2.2)$$

Analogamente, fixado o *período* de  $t = 0$  a  $t = 1$ , obtém-se a relação [vd. Figura 2.2]:

$$c = \frac{1}{R} [p c_u + (1-p) c_d]. \quad (2.3)$$

Da substituição de (2.1) e (2.2) em (2.3) obtém-se, finalmente, a expressão que permite avaliar uma Opção Call Europeia<sup>(45)</sup> a *dois-períodos* sobre uma Acção<sup>(46)</sup>, e que é a seguinte:

$$c = \frac{1}{R^2} [p^2 c_{uu} + 2p(1-p) c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}]$$

ou, equivalentemente,

$$c = \frac{1}{R^2} [p^2 \max[0, u^2 S - X] + 2p(1-p) \max[0, udS - X] + (1-p)^2 \max[0, d^2 S - X]].$$

<sup>(45)</sup> Construção similar dá-nos o valor de uma Opção Europeia Put a *dois-períodos* que é a seguinte:

$$P = \frac{1}{R^2} [p^2 P_{uu} + 2p(1-p) P_{ud} + (1-p)^2 P_{dd}].$$

<sup>(46)</sup> Considera-se que a Acção não prevê quaisquer pagamentos de dividendos.

Extrapolando o resultado anterior para o caso de uma Opção Europeia do tipo Call<sup>(47)</sup> a  $N$ -períodos, obtém-se, facilmente, a partir do Binómio de Newton, a seguinte expressão:

$$c = \frac{1}{R^n} \left[ \sum_{j=0}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max[0, u^j d^{n-j} S - X] \right].$$

Esta expressão pode ser reescrita de um modo mais conveniente ao cálculo. Foi William Sharpe quem procedeu ao seu aprimoramento, supondo, para o efeito, ser  $a$  o número mínimo de movimentos do tipo ascendente observados no preço de um activo ao longo dos  $n$  períodos considerados, de modo a que a Opção Call associada expire *in-the-money*.

Dito de outra forma:  $a$  é o menor número inteiro tal que:

$$u^a d^{n-a} S > X.$$

Da aplicação simultânea da função logarítmica a ambos os membros da desigualdade anterior, tira-se o valor de  $a$ .

Assim,  $a$  será o menor número inteiro superior a

$$\frac{\log(X/Sd^n)}{\log(u/d)}.$$

Logo, para todo o  $j < a$ ,

$$\max[0, u^j d^{n-j} S - X] = 0,$$

e para todo o  $j \geq a$ ,

$$\max[0, u^j d^{n-j} S - X] = u^j d^{n-j} S - X.$$

<sup>(47)</sup> Analogamente, uma Opção Europeia Put a  $N$ -períodos terá a seguinte expressão:

$$P = \frac{1}{R^n} \left[ \sum_{j=0}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max[0, X - u^j d^{n-j} S] \right].$$



Assim sendo,

$$c = \frac{1}{R^n} \left[ \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} [u^j d^{n-j} S - X] \right]$$

Reescrevendo  $c$  de outro modo, obter-se-á

$$c = S \left[ \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \left( \frac{u^j d^{n-j}}{R^n} \right) \right] - XR^{-n} \left[ \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \right].$$

O segundo termo é facilmente identificado como sendo a função de distribuição acumulada (complementar) Binomial  $\Phi[a, n, p]$ .

O primeiro termo é também susceptível de ser interpretado como sendo uma função de distribuição acumulada Binomial do tipo  $\Phi[a, n, p]$  onde

$$p' = (u/R)p \quad \wedge \quad 1-p' = (d/R)(1-p).$$

Com efeito,

$$p^j (1-p)^{n-j} \left( \frac{u^j d^{n-j}}{R^n} \right) = [(u/R)p]^j [(d/R)(1-p)]^{n-j} = (p')^j (1-p')^{n-j}$$

com  $0 < p' < 1$ , pois que se prova ser  $p < R/u$ .

Por fim, é possível resumir o desenvolvimento binomial atribuído a William Sharpe da seguinte forma:

$$c = S\Phi[a, n, p'] - XR^{-n}\Phi[a, n, p]$$

onde  $p = (R-d)/(u-d)$ ;  $p' = (u/R)p$ , e  $a$  é o menor número inteiro superior a  $\log(X/Sd^n)/\log(n/d)$ .

Obviamente, no caso de  $a > n$ , então,  $c = 0$ .

#### 4. AVALIAÇÃO DE UMA OPÇÃO CALL EUROPEIA A $N$ -PERÍODOS SOBRE UMA ACÇÃO QUE NÃO PREVÊ PAGAMENTO DE DIVIDENDOS

Consideremos agora o caso de uma Opção Call Americana sobre uma Acção que não prevê o pagamento de quaisquer *dividendos*. Suponhamos a duração da mesma igual a  $T$ .

Divida-se  $T$  em  $N$  subintervalos de igual amplitude  $\Delta t$ .

Seja  $c_{ij}$  o valor da referida Opção num instante  $i\Delta t$ , quando o preço do activo a ela associado é igual a  $u^i d^{N-j} S$ , tomando  $0 \leq i \leq N$  e  $0 \leq j \leq i$ .

De agora em diante, em situações idênticas, quando pretendermos aludir ao valor de uma Opção numa determinada *posição*, fá-lo-emos por referência ao *nodo* que lhe corresponde.

Sendo o valor de uma Opção Call Americana, à data de expiração, igual ao  $\max[0, S_T - X]$ , decorre das notações adoptadas que

$$c_{Nj} = \max[0, u^j d^{N-j} S - X] \quad , \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Tendo por base o raciocínio exposto no modelo Binomial, considere-se  $p$  a probabilidade de que a evolução do valor da Opção seja feita do *nodo*  $(i, j)$ , no instante  $i\Delta t$ , para o *nodo*  $(i+1, j+1)$  no instante  $(i+1)\Delta t$ . Complementarmente,  $(1-p)$  traduz a probabilidade de que essa mesma evolução ocorra do *nodo*  $(i, j)$  para o *nodo*  $(i+1, j)$ , entre os instantes  $i\Delta t$  e  $(i+1)\Delta t$ .

Se excluirmos a hipótese do exercício antecipado da Opção, o valor *parcial* da mesma no *nodo*  $(i, j)$ , considerando o princípio do risco neutro, será dado pela relação

$$c_{ij} = e^{-r\Delta t} [pc_{i+1,j+1} + (1-p)c_{i+1,j}] \quad , \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j \leq i \quad (2.4)$$

já anteriormente deduzida, aquando do estudo da avaliação de uma Opção Call Europeia a *um-período*, e aqui reescrita com base na notação entretanto adoptada, por ser a mais adequada ao raciocínio a desenvolver.

Quando se coloca a hipótese do exercício antecipado de uma Opção, o seu valor - no respeito do princípio segundo o qual o investidor decidirá sempre pela acção que proporciona maior "ganho" - resulta da escolha comparada entre o valor obtido através da expressão (4) e o valor "intrínseco" da Opção em cada particular instante, ou seja<sup>(48)</sup>

$$c_{ij} = \max \left[ u^j d^{i-j} S - X, e^{-r\Delta t} \left[ p c_{i+1,j-1} + (1-p) c_{i-1,j} \right] \right].$$

Ora, sendo os cálculos feitos de forma "recursiva", começando em  $T$ , o valor da Opção, obtido no instante  $i\Delta t$ , contempla, não só os possíveis efeitos da antecipação do exercício no referido momento, como também os efeitos decorrentes de hipotéticos exercícios em momentos posteriores.

No limite, isto é, quando  $\Delta t$  tende para zero, uma boa aproximação ao valor exacto da Opção - quer seja uma Opção Call ou uma Opção Put - pode assim ser obtido<sup>(49)</sup>.

## 5. MODELO BINOMIAL PARA ACÇÕES QUE PREVÊEM PAGAMENTO DE DIVIDENDOS

Introduz-se neste estudo, a hipótese adicional de os activos associados às Opções pagarem *dividendos*.

A verificar-se o exercício antecipado<sup>(50)</sup> de uma Opção em consequência do pagamento de *dividendos* tal só deverá ocorrer antes da última liquidação dos mesmos se a Opção for de compra (Call Americana) e depois da sua liquidação, no caso de a Opção ser de venda (Put Americana) [Vd. Capítulo I].

Relativamente aos *dividendos* a serem pagos, duas modalidades distintas podem verificar-se: ou a Acção associada à Opção gera um *dividendo* a uma taxa fixa, seja  $\delta$ , a ser paga no futuro, num determinado momento (*Known Dividend Yield*); ou, o que é o mais

(48) Decorre do exposto que, a haver *racionalidade* na formação do preço dos activos no mercado, o valor de uma Opção Call Americana a *um-período* no instante  $t = 0$  será dado, como já se esperava, pela relação

$$c = c_{0,0} = \max \left[ u^0 d^{0-0} S - X, \frac{1}{R} \left[ p c_{1,1} + (1-p) c_{1,0} \right] \right] = \max \left[ S - X, \frac{1}{R} \left[ p c_u + (1-p) c_d \right] \right]$$

(49) Na prática  $N = 30$  assegura resultados razoáveis.

(50) Hipótese essa, recorde-se, só possível no caso das "Opções Americanas".

usual, conhece-se o montante *cash* dos dividendos a serem pagos pela Acção (*Known Dollar Dividend*).

O que se segue pretende reflectir como é que um eventual pagamento de *dividendos* se repercutirá no *modus operandi* anteriormente exposto de avaliação de Opções sobre Acções. Sem reconstituir todo o processo de raciocínio, destacamos, no entanto, as alterações que julgamos fundamentais.

### 5.1. "KNOWN DIVIDEND YIELD"

Assim, se se considerar o instante  $i\Delta t$  como sendo o momento exactamente anterior áquele em que ocorre o pagamento dos *dividendos*, então a cada *nodo*  $(i, j)$  corresponde um preço previsível para a Acção que é do tipo

$$u^j d^{i-j} S, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

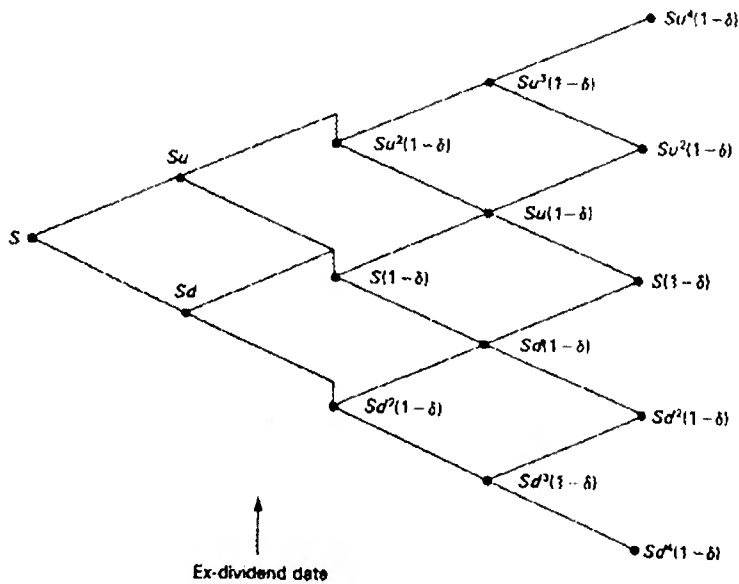
onde  $u$  e  $d$  são já conhecidos.

Se, pelo contrário, considerarmos ser o instante  $i\Delta t$  aquele que imediatamente se sucede ao pagamento dos *dividendos*, então a cada *nodo*  $(i, j)$  corresponde um preço previsível para a Acção que é igual a

$$u^j d^{i-j} S(1 - \delta), \quad j = 0, 1, \dots, i.$$

No caso, mais geral, de se prever o pagamento de *dividendos* em mais do que um *período* durante a vigência da Opção, e estimando que o total de *dividendos* pagos entre o momento inicial e o instante  $i\Delta t$ , seja computável a uma taxa  $\delta_i$ , então ao instante  $i\Delta t$  corresponderá um preço da Acção igual a

$$u^j d^{i-j} S(1 - \delta_i), \quad j = 0, 1, \dots, i.$$



**Figura 2.1** Árvore de simulação de uma Acção que paga "a Known Dividend Yield"

## 5.2. "KNOWN DOLLAR DIVIDEND"

Suponhamos, neste contexto, que ocorre um só pagamento de *dividendos*; que  $D$  é o montante "cash" a ser liquidado; e que o momento  $\tau$  imediatamente posterior ao referido pagamento se situa entre os instantes  $k\Delta t$  e  $(k+1)\Delta t$ .

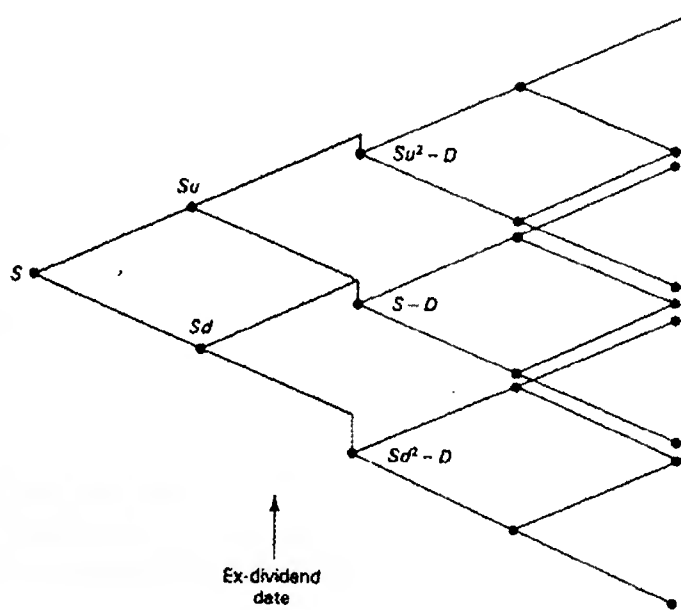
A todos os momentos  $i\Delta t$ , tais que  $i \leq k$ , correspondem os preços normais da Acção. Isto é, preços sem alterações substanciais relativamente ao que se conhece de situações análogas, anteriormente estudadas.

Ao instante  $i\Delta t$ , sendo  $i = k+1$ , corresponde um preço da Acção que é igual a

$$u^j d^{i-j} S - D, \quad j=0,1,\dots,i.$$

Por fim, a um instante  $i\Delta t$ , quando  $i > k+1$ , corresponderá um de entre dois possíveis preços da Acção

$$(u^j d^{i-j} S - D)u \quad \text{ou} \quad (u^j d^{i-j} S - D)d, \quad j=0,1,\dots,i-1.$$



**Figura 2.2** Árvore de simulação de uma Acção que paga "a Known Dollar Dividend"

## 6. DETERMINAÇÃO DE $u$ , $d$ E $p$ .

Do que anteriormente se expôs, destaca-se a importância que as constantes  $u$ ,  $d$  e  $p$  assumem na modelização estudada. Porém, até ao momento, nada foi afirmado relativamente ao seu processo de cálculo.

O valor das constantes multiplicativas  $u$ ,  $d$  e  $p$  deve permitir o cálculo exacto do *valor esperado* e da *variância* intrínsecas à variável aleatória em estudo - preço da Acção -, quando esta é sujeita a uma alteração num subintervalo  $\Delta t$ .

Dito de outro modo,  $u$ ,  $d$  e  $p$  devem ser determinados a partir da condição de igualdade do valor esperado e da variância das distribuições discreta e contínua.

Acontece que numa economia de risco-neutro, o valor esperado do rendimento da Acção coincide com a taxa,  $r$ , de risco-zero do mercado.

Sendo assim,  $Se^{r\Delta t}$  dá-nos o valor esperado do preço de uma Acção decorrido um período infinitesimal de tempo  $\Delta t$ , considerando-se que  $S$  representa o preço da Acção no início do mesmo período de tempo.

Daqui decorre a seguinte igualdade:

$$Se^{r\Delta t} = p(uS) + (1-p)(dS)$$

ou, simplificando,

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d. \quad (2.5)$$

Se recordarmos que a variância do preço de uma Acção, tomada num pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ , é dada pela expressão  $S^2 \sigma^2 \Delta t$ , então a partir da Fórmula de Koenlgs<sup>(51)</sup> tira-se que:

$$S^2 \sigma^2 \Delta t = [pS^2 u^2 + (1-p)S^2 d^2] - [S^2 (pu + (1-p)d)^2]$$

ou seja, que,

$$\sigma^2 \Delta t = [pu^2 + (1-p)d^2] - [pu + (1-p)d]^2. \quad (2.6)$$

As relações (2.5) e (2.6) proporcionam duas condições importantes no cálculo de  $u$ ,  $d$  e  $p$ . Uma terceira condição é, porém, necessária à determinação de todas as constantes.

Por norma, utiliza-se a seguinte:

$$u \times d = 1.$$

As três condições anteriores, consideradas simultaneamente, permitem-nos obter as relações desejadas

$$\begin{cases} u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ p = \frac{a-d}{u-d} \end{cases}$$

onde  $a = e^{r\Delta t}$  e  $\Delta t = \frac{T}{N} \rightarrow 0$ .

---

<sup>(51)</sup> Qualquer que seja a variável aleatória  $X$ , tem-se que  $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ .

Esta metodologia de cálculo dos parâmetros, devida a Hull e White, não é única. No Capítulo VI retomaremos esta problemática enunciando vias alternativas de cálculo dos parâmetros  $u$ ,  $d$  e  $p$ .

## 7. CONCLUSÃO:

A complexidade matemática dos primeiros trabalhos relativos à avaliação de Opções, pelo seu excessivo formalismo, chegava a secundarizar os princípios económicos subjacentes. Deve-se a Cox, Ross, Rubinstein, e sobretudo a William Sharpe, que deduziram os mesmos resultados utilizando instrumentos matemáticos bem mais acessíveis, a divulgação de um modelo de avaliação de Opções que passou, por isso, a ser melhor entendido pelo comum dos investidores.

A avaliação de Opções pela via Binomial pode parecer simplista, até redutora, uma vez que, por cada período analisado, só se admitem duas possíveis ocorrências, não obstante o preço de uma Acção poder assumir infinitos valores.

No entanto, demonstra-se que fazendo tender para zero o período de tempo considerado, o modelo que segue uma *multiplicative binomial price distribution* aproxima-se, por exemplo, do modelo que segue uma *lognormal price distribution*. Esta última lei de probabilidade traduz, como se verá no Capítulo III, com razoável eficiência, o comportamento do preço de uma Acção.

O Capítulo que se segue pressupõe o conhecimento de algumas das *ferramentas* matemáticas susceptíveis de nos poderem garantir uma interpretação mais correcta e uma descrição mais rigorosa da evolução do preço de uma Acção ao longo do tempo.

Nesse contexto, decidimo-nos pela inclusão de uma **Anexo Matemático** que pretende resumir todo o acervo de instrumentos matemáticos capazes de contribuir para uma mais correcta descrição da evolução no tempo de uma qualquer variável aleatória.

No Capítulo III ensaiaremos a sua aplicação ao caso particular do preço de uma Acção que não prevê qualquer pagamento de *dividendos*.

Trata-se de um primeiro passo no sentido da determinação da Equação Diferencial de Black-Sholes.



## CAPÍTULO III

### MODELO DE BLACK-SCHOLES

#### 1. INTRODUÇÃO

O preço futuro de um qualquer activo financeiro - *transaccionável*<sup>(52)</sup> ou não -, por ser incerto, só pode ser expresso, com o rigor exigido, utilizando Processos Estocásticos [vd. Anexo Matemático].

No Capítulo II procurou-se estimar o preço de um activo - e por consequência também o valor da Opção associada -, assumindo que a sua evolução se fazia em tempo e espaço de estados discretos. Utilizou-se o Modelo Binomial Multiplicativo numa primeira e incipiente tentativa de prever o seu comportamento futuro.

Neste Capítulo, e na sequência do que se afirmou, procurar-se-á uma modelização que traduza, tão exhaustivamente quanto possível, a evolução futura do preço de um *activo transaccionável* a partir de um processo estocástico, definido em tempo e espaço de estados contínuos.

A referida modelização dirá respeito, numa primeira fase, tão só a activos financeiros que não prevêem o pagamento de *dividendos*.

---

(52) "The term 'traded security' is here used to describe a traded asset that is held solely for investment by a significant number of individuals. Stocks, bonds, gold, and silver are all traded securities. However, interest rates, inflation rates, and most commodities are not.", HULL J. C., "Options, Futures, and other Derivative Securities", p. 274.

Daremos, neste contexto, particular atenção ao processo estocástico relativo à evolução no tempo do preço de uma Acção.

O modelo de avaliação de Opções sobre Acções que completa o presente Capítulo, reflectirá as naturais limitações resultantes do processo estocástico, entretanto deduzido, relativo à evolução do preço de uma Acção.

## 2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA SATISFEITA PELO PREÇO DE UMA ACÇÃO

O processo estocástico que nos propomos modelizar, relativo ao preço de uma Acção, deve traduzir três premissas base.

A primeira é a de que o conhecimento do "histórico" de preços de uma determinada Acção, não permite, por si só, que se estabeleçam quaisquer inferências ácerca do seu comportamento futuro.

Dito de outra maneira, o preço de uma Acção segue um **Processo de Markov**, no sentido em que, para a estimação do seu preço futuro, são irrelevantes os preços observados no passado, devendo atender-se apenas ao seu preço actual.

A segunda é a de que a rendibilidade ou crescimento relativo<sup>(53)</sup> esperado, instantâneo, de uma Acção, num período de tempo infinitamente pequeno,  $\Delta t$ , não depende do preço da própria Acção, ou seja, a *rendibilidade* é considerada constante<sup>(54)</sup>.

Dito de uma forma equivalente: se  $S_1$  e  $S_2$  são os preços de uma Acção nos momentos  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente, considerando  $\Delta S_1$  e  $\Delta S_2$  as correspondentes variações para um mesmo período de tempo,  $\Delta t$ , infinitamente pequeno, então

$$E\left[\frac{\Delta S_1}{S_1}\right] = \mu \Delta t = E\left[\frac{\Delta S_2}{S_2}\right]$$

<sup>(53)</sup> Aqui entendido como a variação do preço do "activo" reflectida no preço corrente do mesmo, isto é,  $\frac{\Delta S}{S}$ .

<sup>(54)</sup> Dito de outra modo, se um investidor exige, por exemplo, uma rendibilidade de 14% para um investimento de 10 u.m, também o fará para um investimento de 50 u.m.

sendo  $\mu$  constante.

Quer dizer, um investidor exige uma mesma rendibilidade independentemente do valor aplicado.

A terceira premissa é a de que se mantém constante a variância<sup>(55)</sup> instantânea do crescimento esperado de uma Acção, num período de tempo infinitamente pequeno  $\Delta t$ , qualquer que seja o preço,  $S$ , da Acção.

Designando por  $\sigma^2$  a variância<sup>(56)</sup> instantânea do crescimento relativo do preço da Acção por unidade de tempo, então, o que anteriormente se disse pode ser traduzido da seguinte maneira:

$$\text{var} \left[ \frac{\Delta S_t}{S_t} \right] = \sigma^2 \Delta t$$

ou, equivalentemente,

$$\text{var}[\Delta S_t] = S_t^2 \sigma^2 \Delta t.$$

Por outras palavras, um investidor está tão *incerto* da rendibilidade da Acção de que é titular, quer o seu valor seja 10 u.m, quer seja 50 u.m.

Ora, um processo estocástico que reflecta, instantaneamente, as três premissas anteriores pode - pelas razões que se explicam no **Anexo Matemático** -, ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \Delta Z \quad (3.1)$$

ou, o que é equivalente,

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta Z \quad (3.2)$$

onde  $\Delta Z$  representa um Movimento Browniano Padrão, tendo-se omitido a dependência de  $S$  e de  $Z$  relativamente a  $t$ , por uma questão de simplificação da escrita.

A partir da definição de Movimento Browniano Padrão, promovendo-se a substituição de  $\Delta Z$  na equação (3.1), obtém-se ainda

<sup>(55)</sup> A *componente aleatória* (estocástica) da rendibilidade da Acção.

<sup>(56)</sup> A  $\sigma$  chamaremos também *volatilidade* do crescimento relativo do preço da Acção.

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma (\varepsilon \sqrt{\Delta t})$$

onde  $\varepsilon$  representa uma variável aleatória com distribuição Normal Standard.

Na sequência do que se expôs, pode finalmente afirmar-se que  $\frac{\Delta S}{S}$  possui uma distribuição Normal com média  $\mu \Delta t$  e desvio padrão  $\sigma \sqrt{\Delta t}$ , ou seja, que:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}).$$

Se passarmos de uma análise das alterações observadas em pequenos intervalos de tempo  $\Delta t$ , para o caso limite em que  $\Delta t \rightarrow 0$ , concluiremos então que o processo estocástico procurado, o qual traduz a evolução contínua no tempo da variável  $S$ , é susceptível de ser identificado como uma solução da Equação Diferencial<sup>(57)</sup> Estocástica

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \quad (3.3)$$

em que os factores  $\mu S dt$  e  $\sigma^2 S^2 dt$  representam, respectivamente, a *tendência* ou valor esperado e a *difusão* ou variância infinitesimais do processo, e que resultam de pequenas alterações produzidas em  $S$ .

Este processo é identificado como sendo um Movimento Browniano Geométrico [vd. **Anexo Matemático**].

Ainda a propósito da relação (3) deve notar-se que no caso de ser nula, num período infinitesimal de tempo, a variância do crescimento relativo de uma dada Acção, então

$$dS = \mu S dt,$$

expressão que é facilmente identificável como sendo uma equação diferencial determinística de variáveis separadas, cuja solução é

$$S = S_0 e^{\mu t}$$

---

<sup>(57)</sup> Recorde-se que, por definição,  $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

onde  $S_0$  representa o preço da referida Acção no instante inicial  $t_0$ .

Este resultado não é estranho, pois, como era esperado, sendo a variância relativa ao processo nula<sup>(58)</sup>, o preço da Acção associada cresce, por unidade de tempo, à taxa composta  $\mu$ , ou seja, segundo a sua *tendência* ou valor esperado.

### 3. A PROPRIEDADE LOGNORMAL DO PREÇO DE UMA ACÇÃO

Por vezes, reveste-se de grande utilidade prática o conhecimento das distribuições de probabilidade de algumas funções de  $S$  de que é principal exemplo a função

$$\Theta = \ln S$$

a qual se prova possui distribuição *lognormal*<sup>(59)</sup>.

Aplicando o **Lema de Ito** à função  $\Theta = \ln S$ , é possível determinar o processo estocástico seguido por  $\Theta$ .

Com efeito, sendo

$$\frac{\partial \Theta}{\partial S} = \frac{1}{S} \quad , \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \quad , \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0$$

conclui-se, então, que

$$d\Theta = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dZ$$

é a Equação Diferencial Estocástica de  $\Theta$ , onde  $\mu$  e  $\sigma$  são constantes e  $dZ$  representa um Movimento Browniano Padrão - também conhecido por Processo de Wiener.

(58) Isto é, quando a componente aleatória ou de *incerteza* do processo é nula.

(59) Diz-se que uma variável aleatória  $X$  segue uma distribuição Lognormal se a v.a.  $\ln(X)$  possuir distribuição Normal. Uma variável aleatória *lognormal* assume valores entre 0 e infinito. Contrariamente à distribuição Normal Standard, a distribuição *lognormal* não é simétrica possuindo até um enviesamento tal que nem a média, nem a mediana, nem a moda, coincidem.

Dito de outro modo, a função  $\Theta$  segue um Processo Generalizado de Wiener<sup>(60)</sup> cujo valor esperado (ou *Tendência*) e variância (ou *Difusão*) são constantes, e iguais a  $(\mu - \sigma^2/2)$  e a  $\sigma^2$ , respectivamente.

Assim sendo, a variação de  $\theta$  entre um instante inicial  $t$  e um instante final  $T$  possui distribuição Normal com média  $(\mu - \sigma^2/2)(T-t)$  e variância  $\sigma^2(T-t)$ .

Se designarmos por  $\ln(S_T)$  e  $\ln(S_t)$ , respectivamente, os valores da função  $\Theta = \ln S$ , nos instantes  $t$  e  $T$ , pode então escrever-se que

$$\ln(S_T) - \ln(S_t) \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

ou ainda<sup>(61)</sup> que

$$\ln(S_T) \sim N\left[\ln(S_t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]. \quad (3.4)$$

Dito de outra forma, o preço futuro de uma Acção, conhecido o seu preço actual, segue uma lei de probabilidade *lognormal*.

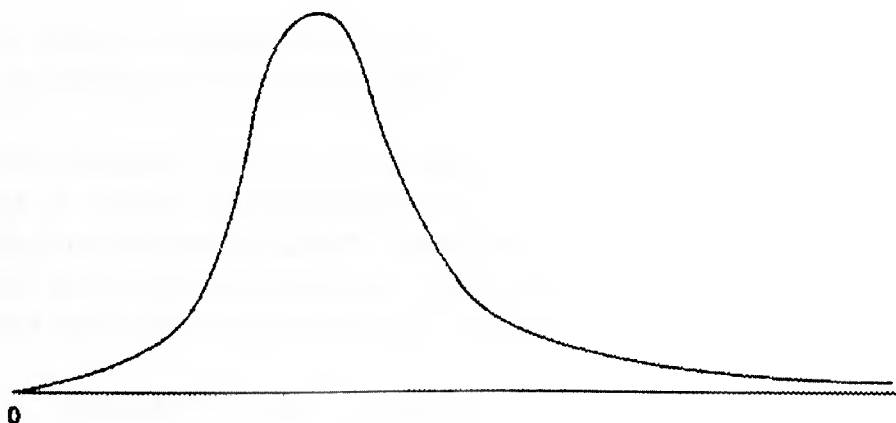


Figura 3.1 Distribuição de probabilidade Lognormal

<sup>(60)</sup> Ou Processo de *Difusão* com *Tendência*.

<sup>(61)</sup> Da relação (4) e das propriedades da distribuição *lognormal*, facilmente se determina que

$$\begin{cases} E(S_T) = S e^{\mu(T-t)} \\ \text{var}(S_T) = S^2 e^{2\mu(T-t)} (e^{\sigma^2(T-t)} - 1) \end{cases},$$

o que está de acordo com a definição de  $\mu$  como sendo o crescimento relativo esperado de  $S$ .

#### 4. DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BLACK-SCHOLES

O modelo de avaliação de uma Opção apresentado no Capítulo II, evidencia, como já se afirmou, os méritos e as debilidades próprias do processo utilizado na descrição da evolução do preço de uma Acção no tempo.

Se o Modelo Binomial Multiplicativo, quando o tempo e espaço de estados são definidos de forma discreta, parece corresponder ao que dele é esperado, já a sua utilização é desajustada quando se assumem contínuos quer o tempo, quer o espaço de estados de  $S$ .

O estudo da evolução do preço de um *activo*, e em particular de uma Acção, definido em tempo e espaço de estados contínuos, obriga a uma análise mais elaborada.

Foi, pois, num quadro de maior complexidade que surgiu, proposta por F. Black e M. Scholes<sup>(62)</sup>, a fórmula a que ambos deram nome. Ela visa determinar o valor de uma **Opção Europeia** sobre uma Acção, num qualquer instante da sua vida.

A ideia fundamental em que assenta a sua dedução não é nova, tendo, no essencial, sido apresentada no Capítulo II.

Recordando: é sempre possível formar um *Portfolio* de títulos (Opções + activos associados) de risco-zero. Ou seja, pode sempre obter-se um rendimento certo - qualquer que seja o comportamento no mercado do Acção considerada - igual áquele que se obteria se fosse feita uma aplicação a uma taxa de juro sem risco.

A dedução<sup>(63)</sup> da Equação Diferencial de Black-Scholes faz-se num quadro limitado onde se pressupõe serem verificadas as seguintes premissas:

[P1]- o preço de uma Acção segue sempre o processo estocástico

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

(62) BLACK, F., SCHOLES, M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" in Journal of Political Economy, pp. 637 a 654.

(63) A metodologia empregue na sua dedução, pode, no entanto, ser adaptada a outras situações em que algumas das premissas de partida são relaxadas.

onde se consideram  $\mu$  e  $\sigma$  constantes;

[P2]- não são admitidas oportunidades de arbitragem "sem risco"<sup>(64)</sup>;

[P3]- não são considerados pagamentos de *dividendos* na vigência das Opções;

[P4]- considera-se a taxa de juro de risco-zero,  $r$ , constante e igual para todas as maturidades.

[P5]- admite-se a possibilidade de utilização dos "benefícios" resultantes de vendas "curtas" das Opções;

[P6]- admite-se a *divisibilidade* das Opções, isto é, não se obriga à negociação da totalidade do lote;

[P7]- a negociação das Opções decorre de forma contínua;

Neste contexto, designemos genericamente por  $f(t, S)$  - ou simplesmente  $f$  - o valor de uma Opção (Call ou Put) sobre uma Acção de preço  $S$  num instante  $t$ .

Da premissa [P1] e do Lema de Ito sabe-se, respectivamente, que

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3.5)$$

e que

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \mu S + \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (3.6)$$

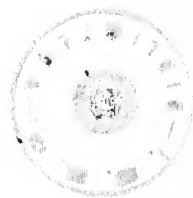
pois  $f$  é função de  $S$  e de  $t$ , e onde  $dz$  representa, em ambos os casos, o mesmo Processo de Weiner.

Consideremos de seguida um *Portfolio*<sup>(65)</sup>  $\Omega$  (*Riskless Portfolio*) constituído por:

<sup>(64)</sup> Ditas *Riskless Arbitrage Opportunities*.

<sup>(65)</sup> O Portfolio  $\Omega$  detém a qualidade "risco-zero" somente em períodos de tempo pequenos. Como quaisquer alterações de  $S$  e  $t$  se repercutem no valor de  $\frac{\partial f}{\partial S}$ , a





- uma posição *curta* na Opção;
- uma posição *longa* em  $n_s = \frac{\partial f}{\partial S}$  títulos da Acção.

O valor do *Portfolio*  $\Omega$ ,  $\Pi_\Omega$  é, por definição,

$$\Pi_\Omega = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S.$$

Uma qualquer alteração,  $d\Pi_\Omega$ , observada no valor do *Portfolio*  $\Omega$ , num intervalo infinitesimal de tempo  $\Delta t$  escreve-se do seguinte modo:

$$d\Pi_\Omega = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS.$$

Se na expressão de  $d\Pi_\Omega$  substituirmos  $df$  e  $dS$  pelas suas expressões<sup>(66)</sup> equivalentes (5) e (6), então obteremos

$$d\Pi_\Omega = \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt.$$

A ausência de  $dz$  permite-nos afirmar que num intervalo de tempo infinitamente pequeno  $\Delta t$ , o *Portfolio*  $\Omega$  possui risco-zero.

Assim sendo, a sua rendibilidade instantânea em  $\Delta t$  pode ser equiparada à taxa de juro de risco-zero  $r$ , isto é,

$$d\Pi_\Omega = r\Pi_\Omega dt.$$

As duas últimas expressões de  $d\Pi_\Omega$ , conjugadas, permitem concluir que

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt = r \left( f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) dt$$

ou, o que é equivalente,

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} = rf$$

manutenção no tempo da característica anterior consegue-se promovendo uma variação contínua e *equilibrada* das proporções do Acção e respectiva Opção no Portfolio.

<sup>(66)</sup> A escolha de um portfolio apropriado que conjugue uma posição *curta* na Opção e uma posição *longa* na Acção tem o efeito de anular a componente de *incerteza* comum a um e a outro e traduzida no processo pelo Modelo de Wiener  $\Delta z = \varepsilon \Delta t$ .

expressão que é conhecida como **Equação Diferencial Estocástica de Black-Scholes**.

## 5. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BLACK SCHOLES

A Equação Diferencial de Black-Scholes não tem uma única solução.

Uma solução particular decorre, necessariamente, da especificação das "condições fronteira" (*boundary conditions*) relativas a cada Produto Derivado.

No caso das Opções Call Europeias as referidas condições fronteira são, como se sabe, definidas por:

$$f = c(T, S(T)) = \max[0, S_T - X]$$

sendo, no caso das Opções Put Europeias, definidas por:

$$f = p(T, S(T)) = \max[0, X - S_T].$$

A resolução proposta da Equação Diferencial de Black-Scholes obriga a uma mudança de variável<sup>(67)</sup>, sugerida por Black e Sholes, e que é a seguinte:

$$c(t, S(t)) = \exp[r(t - T)]H[u, v],$$

onde

$$\begin{cases} u = \frac{2}{\sigma^2} \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \left[ \ln \frac{S}{X} - \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - T) \right] \\ v = -\frac{2(t - T)}{\sigma^2} \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 \end{cases}$$

Da sua aplicação resulta a seguinte Equação Diferencial

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2},$$

<sup>(67)</sup> Ver Autores e ob. cit. nota 62, p. 643.

sujeita à condição fronteira

$$H(u, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } u < 0 \\ X \left[ \exp \left( \frac{u\sigma^2}{2} \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^{-1} \right) - 1 \right] & \text{se } u \geq 0 \end{cases}$$

A solução desta última Equação Diferencial, conhecida na Física como sendo a *Equação de Transferência de Calor*, foi encontrada por Churchill. A sua expressão, na notação adoptada, depois de substituída na Equação Diferencial de Black-Scholes é a que se apresenta:

$$C(t, S(t)) = S(t)\Phi(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad (3.7)$$

onde

$\Phi(x) \equiv$  função de distribuição acumulada de uma v.a Normal Standard;

sendo

$$d_1 = \frac{\ln(S(t)/X) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

e

$$d_2 = \frac{\ln(S(t)/X) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (3.8)$$

Designamo-la por **Fórmula de Black-Scholes**.

## 6. AVALIAÇÃO NUMA ECONOMIA NEUTRA AO RISCO

As variáveis que dão expressão à Fórmula de Black-Scholes são, recordemos, as seguintes: o preço corrente da Acção ( $S$ ); o preço de exercício ( $X$ ); o tempo até ao vencimento ( $T-t$ ); a volatilidade do preço da Acção ( $\sigma$ ) e a taxa de juro de risco-zero ( $r$ ).

Nenhuma traduz a *predisposição* do investidor ao risco. Dito de outro modo, se para duas Opções distintas todos os parâmetros anteriores possuírem valores iguais, então também as Opções assumem valor idêntico, mesmo quando o valor esperado do preço do activo associado, na data de expiração, seja diferente.

Ou seja, a Equação Diferencial de Black-Scholes não incorpora quaisquer variáveis que reflectam a maior ou menor *sensibilidade* dos investidores na sua exposição ao risco.

Com efeito, as diferentes atitudes dos investidores face ao risco não aparecem reflectidas, de uma forma explícita, tanto na Equação Diferencial como na Fórmula de Black-Scholes. Só implicitamente os investidores têm a possibilidade de manifestar as suas preferências, e fazem-no na razão directa da taxa de rendibilidade (média esperada)  $\mu$  que exigem<sup>(68)</sup>.

Esta virtualidade da equação de Black-Scholes permite, no limite, afirmar que todos os investidores são *imunes* ou *indiferentes* ao risco.

Ora, num universo de investidores *imunes* ao risco, a taxa de rendibilidade esperada,  $\mu$ , confunde-se<sup>(69)</sup>, para todo o investimento, com a taxa de juro de risco-zero,  $r$ . Diremos, então, que estamos perante uma Economia neutra ao risco, ou, equivalentemente, num universo de risco-zero.

A assunção do *princípio* da Economia neutra ao risco simplifica, em muito, a análise e a avaliação das Opções.

Por exemplo, o valor esperado de uma Opção no final de um período de tempo,  $T$ , pode ser calculado estimando em  $r$ , e não em  $\mu$ , o valor da rendibilidade esperada da Acção associado.

Analogamente, no processo de "actualização" do valor esperado da Opção, poder-se-á utilizar  $r$ , e não  $\mu$ , como taxa de desconto.

O aparente artificialismo<sup>(70)</sup> destas soluções não obsta a que se mantenham válidas mesmo em economias "abertas" em que se não considera o pressuposto do risco-neutro. Com efeito, numa economia "aberta"<sup>(71)</sup>, quer a taxa de crescimento do preço da Acção associada à Opção, quer a taxa de "actualização", variam. Estas variações simultâneas processam-se, porém, em sentidos opostos, pelo que o efeito conjugado das duas promove a sua recíproca anulação.

---

(68) Quanto maior for a "aversão" ao risco, maior será, naturalmente, a rendibilidade média esperada  $\mu$ , exigida pelo investidor. Acontece que  $\mu$  não aparece quer na Fórmula, quer na Equação de Black-Scholes.

(69) O que acontece porque "... risk-neutral investors do not require a premium to induce them to take risks", Autor e ob. cit. nota 52, p.222.

(70) "... the risk-neutrality assumption is merely an artificial device for obtaining solutions to the Black-Scholes differential equation." Autor e ob. cit. nota 52, p.222

(71) "When we move from a risk-neutral world to a risk-averse world, two things happen. The expected growth rate in the stock price changes and the discount rate that must be used for any payoff from the derivative security changes. It happens that these two effects always offset each other exactly.", Autor e ob. cit. nota 52, p.222

O valor corrente de uma qualquer Opção pode, assim, também e alternativamente, ser calculado "actualizando" à taxa de juro risco-zero o valor esperado da Opção à data da sua expiração.

Ora, do **Capítulo I** sabe-se que o valor esperado de uma Opção Call Europeia em  $T$  (isto é, na maturidade), considerada uma economia de risco Neutro, é dado por

$$\hat{E}[\max(S_T - X, 0)]$$

onde  $\hat{E}$  designa o valor esperado de uma função num contexto de risco-zero.

O valor,  $c$ , de uma Opção Call Europeia actualizado à taxa de juro de risco-zero,  $r$ , será então dado pela expressão

$$c = e^{-r(T-t)} \hat{E}[\max(S_T - X, 0)]$$

ou, equivalentemente, por

$$c = e^{-r(T-t)} \int_x^{+\infty} (S(T) - X) g(S(T)) dS(T)$$

onde  $g$  representa a função densidade de  $S(T)$ .

Como o rendimento da Acção, admitindo-se indiferença ao risco, é determinado a partir da taxa de juro sem risco do mercado, então também a função densidade  $g$  pode, analogamente, ser expressa, assumindo que<sup>(72)</sup>

$$\ln S(T) \sim N \left[ \ln S(t) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t), \sigma^2 (T-t) \right].$$

Esta via de cálculo, que pressupõe uma *mudança de variável* do tipo  $S_T = e^w$ , permite obter valores coincidentes com os que são determinados através da Fórmula de Black-Scholes.

Por outro lado, e dado que  $c = C$ , a expressão anterior, relativa ao valor de Opções Call Europeias, mantém-se igualmente válida para a avaliação de Opções Call Americanas.

<sup>(72)</sup> Esta distribuição já antes tinha sido deduzida. Nesta versão substituiu-se a tendência infinitesimal do preço de uma Acção por unidade de tempo,  $\mu$ , pela taxa de juro sem risco do mercado,  $r$ .

A partir de um raciocínio análogo ou, mais simplesmente, através da **relação de paridade Call-Put**<sup>(73)</sup>, obtém-se uma expressão equivalente para Opções Put Europeias, e que é a seguinte:

$$p = Xe^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S \Phi(-d_1).$$

Não existe, porém, uma expressão idêntica aplicável a Opções Put Americanas.

## 7. PROPRIEDADES DA FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES

Importa agora fazer o estudo do comportamento da Fórmula de Black-Scholes em situações *limite*, isto é, a análise do seu comportamento quando os parâmetros assumem valores extremos. Esta análise permitir-nos-á comprovar a validade e consistência das fórmulas anteriores. Mas não só. Veremos também como a partir da Fórmula de Black-Scholes poderemos confirmar algumas das propriedades conhecidas do valor de uma Opção [vd. Cap.I]. Referimo-nos, particularmente, àquelas que foram estabelecidas em função do modo como cada um dos factores determinantes do valor de uma Opção influi nesse mesmo valor.

O raciocínio que se segue será feito utilizando Opções Call Europeias sobre Acções. A sua extrapolação para o caso de Opções Put Europeias é imediata, razão pela qual a omitiremos.

Por exemplo,

**[A1].** É intuitivo que o aumento<sup>(74)</sup> do preço de uma Acção,  $S$ , torna *quase certo* o exercício da Opção que lhe está associada pelo que, assim sendo,

$$S - Xe^{-rT}$$

será o valor esperado da Opção Call.

O mesmo deverá, pois, concluir-se a partir da Fórmula de Black-Scholes.

<sup>(73)</sup> Da **relação de paridade Call-Put** [vd. Capítulo I] sabe-se que  $p = c - S + Xe^{-r(T-t)}$ .

<sup>(74)</sup> O aumento do preço de uma Acção,  $S$ , torna *nulo* o valor da Opção Put a que está associada. Tal resultado é consistente com a fórmula  $p = Xe^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S \Phi(-d_1)$ , pois à medida que o valor de  $S$  aumenta,  $\Phi(d_1)$  e  $\Phi(d_2)$  tendem para zero.

Com efeito, à medida que o valor de  $S$  aumenta, também  $d_1$  e  $d_2$  aumentam e, conseqüentemente,  $\Phi(d_1)$  e  $\Phi(d_2)$  tendem ambos para um, concluindo-se da Fórmula de Black-Scholes que  $c = S - Xe^{-rT}$ .

Também a conclusão de que, quanto maior for o preço corrente da Acção associada à Opção, maior será o seu valor, é inteiramente legítima, pois,

$$\frac{\partial c}{\partial S} = \Phi(d_1) > 0.$$

O valor de  $c_s$  define para todo o instante  $t$ , a razão entre o número de Acções e o número de Opções existentes num *Portfolio* de risco-zero. Dito de outra maneira,  $c_s$  estabelece o número exacto de Acções a adquirir de modo a *cobrir* a venda de uma Opção.

Ora, sendo  $0 < \Phi(d_1) < 1$ , conclui-se, então, ser necessário menos do que uma Acção por cada Opção Call vendida.

Como, acrescidamente,

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} \Phi'(d_1) > 0,$$

é ainda possível afirmar que a quantidade de Acções a adquirir por cada Opção Call vendida aumenta com o preço corrente da própria Acção. Ou seja,  $c_s$  é também uma função crescente de  $S$ .

Mais,

[A2]. Quando a volatilidade do preço da Acção tende para zero, o risco que lhe está associado é nulo pelo que, no final de um período  $T-t$ , o valor da Acção, crescendo à taxa de risco-zero  $r$ , será  $Se^{r(T-t)}$ .

Consequentemente, o valor correspondente da Opção será

$$\max[Se^{r(T-t)} - X, 0]$$

cuja "actualização" à taxa  $r$

$$e^{-r(T-t)} \max[Se^{r(T-t)} - X, 0]$$

é igual a

$$\max[S - Xe^{-r(T-t)}, 0].$$

É possível chegarmos a essa mesma conclusão a partir da Fórmula de Black-Scholes.

Com efeito, caso

$$S > Xe^{-r(T-t)},$$

então

$$\ln\left(\frac{S}{X}\right) + r(T-t) > 0.$$

Assim, se se considerar que a volatilidade do preço da Acção tende para zero e atendendo a que  $\ln\left(\frac{S}{X}\right) + r(T-t) > 0$ , então, necessariamente  $d_1, d_2 \rightarrow +\infty$ , o que, por sua vez, implica que  $\Phi(d_1), \Phi(d_2) \rightarrow 1$ , donde decorre

$$c = S - Xe^{-rT}.$$

No caso contrário, isto é, se

$$S < Xe^{-r(T-t)},$$

então

$$\ln\left(\frac{S}{X}\right) + r(T-t) < 0.$$

De modo idêntico, considerando por hipótese que  $\sigma \rightarrow 0$  e que  $\ln\left(\frac{S}{X}\right) + r(T-t) < 0$ , então  $d_1, d_2 \rightarrow -\infty$  pelo que  $\Phi(d_1), \Phi(d_2) \rightarrow 0$ , concluindo-se, a partir daí, que  $c = 0$ .

Confirma-se, assim, ser o preço de uma Opção Call<sup>(75)</sup> dado por

$$\max[S - Xe^{-r(T-t)}, 0].$$

Por outro lado, quando  $\sigma \rightarrow +\infty$ , prova-se que o valor da Opção Call tende para o preço corrente da Acção associada.

Com efeito, sendo a derivada de  $c(t, S(t))$  em ordem a  $\sigma$

---

<sup>(75)</sup> De modo similar prova-se que o preço de uma Opção Put é dado pelo  $\max[Xe^{-rT} - S, 0]$  quando  $\sigma \rightarrow 0$ .



$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}\Phi'(d_1) > 0,$$

é possível afirmar que o preço de uma Opção Call é função crescente de  $\sigma$  pelo que, quanto maior for a volatilidade<sup>(76)</sup> ou risco associado à Acção, maior será o valor da Opção correspondente.

Mais,

[A3]. Sendo

$$\frac{\partial c}{\partial X} = -\exp[r(t-T)]\Phi(d_2) < 0$$

conclui-se que o valor de Black-Scholes de uma Opção Call Europeia é uma função decrescente do preço de exercício.

Isto é, a um incremento infinitesimal no valor de  $X$ ,  $dX$ , corresponde um incremento de sinal contrário no valor de  $c$ , dado por  $dc = -\exp[r(t-T)]\Phi(d_2)dX$ .

Das relações (5) e (6) é também possível afirmar que

$$\lim_{X \rightarrow 0} c(X) = S(t)$$

e que

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} c(X) = 0,$$

entendendo-se por  $c(X)$  o valor de Black-Scholes de uma Opção Call em função de  $X$ .

Com efeito, sendo  $\lim_{X \rightarrow 0} d_1 = \lim_{X \rightarrow 0} d_2 = +\infty$  e  $\Phi(X)$  uma função contínua em  $X$ , então, tem-se que  $\lim_{X \rightarrow 0} \Phi(d_1) = \lim_{X \rightarrow 0} \Phi(d_2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = 1$  de onde resulta o que se pretende demonstrar.

[A4]. A circunstância de

$$\frac{\partial c}{\partial T} = X(T-t)\exp[r(t-T)]\Phi(d_2) > 0$$

(76) A assimetria no rendimento da Opção faz com que apenas seja considerado o efeito positivo do aumento de  $\sigma$ .

### 8.2.1. FÓRMULA DE ROLL-GESKE-WHALEY

Roll, Geske, e Whaley sugeriram uma fórmula exacta para a determinação do valor de Opções Call Americanas sobre Acções que prevêem pagamento de *dividendos*.

A sua expressão exacta para a hipótese em que se considera o pagamento de um só dividendo  $D_1$  no instante  $t_1$  é a seguinte:

$$C = (S - D_1 e^{-rt_1}) \Phi(b_1) + (S - D_1 e^{-rt_1}) M(a_1, -b_1, -\sqrt{\tau_1/\tau}) - X e^{-rT} M(a_2, -b_2, -\sqrt{\tau_1/\tau}) - (X - D_1) e^{-rt_1} \Phi(b_2)$$

onde

$M(a, b; \rho) \equiv$  função de probabilidade<sup>(84)</sup> acumulada de uma distribuição Normal Bivariada Standard;

sendo

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\ln[(S - D_1 e^{-rt_1})/X] + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}; \\ a_2 &= a_1 - \sigma\sqrt{\tau}; \\ b_1 &= \frac{\ln[(S - D_1 e^{-rt_1})/\bar{S}] + (r + \sigma^2/2)\tau_1}{\sigma\sqrt{\tau_1}}; \\ b_2 &= b_1 - \sigma\sqrt{\tau_1}; \\ \tau_1 &= t_1 - t; \\ \tau &= T - t. \end{aligned}$$

A variável  $\bar{S}$  é a solução da equação

$$c(\bar{S}, t_1) = \bar{S} + D_1 - X$$

sendo  $c(\bar{S}, t_1)$  o valor de Black-Scholes da Opção quando em (3.5) e (3.6) se faz  $S = \bar{S}$  e  $t = t_1$ .

Caso o exercício antecipado da Opção não seja óptimo, então,  $\bar{S} = +\infty$ . Nesta situação,  $b_1 = b_2 = -\infty$ , pelo que a Fórmula de Roll, Geske, e Whaley se reduz à versão de Merton da Fórmula de Black-Scholes onde  $S$  aparece substituído por  $S - D_1 e^{-rt_1}$ . No caso contrário - ou seja, quando  $\bar{S} < +\infty$  -, a Opção deverá ser exercida no instante  $t_1$ , se  $S(t_1) > \bar{S} + D_1$ .

<sup>(84)</sup> DREZNER, Z, "Computation of the Bivariate Normal Integral", Mathematics of Computation, 32 (January 1978), pp. 277 a 279.

Na hipótese de se considerar mais do que um único pagamento de *dividendos* - e dado que se provou que só o derradeiro instante,  $t_n$ , carece ser considerado quanto a uma eventual antecipação do exercício de uma Opção Americana -, a Fórmula de Roll, Geske, e Whaley pode ainda ser utilizada sempre no pressuposto de que ao valor de  $S$  seja deduzido o valor actualizado de todos os *dividendos* previstos, com excepção do último. Neste contexto,  $D_1$  e  $t_1$ , teriam, justamente, as atribuições referidas.

A análise feita até ao momento centrou-se, exclusivamente, nas Opções Call Americanas.

No que respeita às Opções Put Americanas existem menos certezas quanto ao *modus operandi*.

Por exemplo, o princípio expresso na Proposição 9. [vd. Capítulo I], segundo o qual uma Opção Put Americana (on a non-dividend-paying stock) pode, e em muitas circunstâncias deve, ser antecipada, não é, imediatamente, extrapolável para um contexto em que se admita pagamento de *dividendos*.

Na generalidade das situações pode mesmo afirmar-se que a existência de *dividendos* torna menos plausível o exercício antecipado das Opções Put Americanas.

Uma correcta avaliação do valor das Opções Put Americanas faz-se utilizando Métodos ou Técnicas Computacionais Numéricas.

## 9. OS PARÂMETROS $\mu$ , $r$ E $\sigma$

O processo estocástico proposto para a evolução do preço de uma Acção envolve dois parâmetros,  $\mu$  e  $\sigma$ . A Fórmula de Black-Scholes considera os valores de  $r$  e  $\sigma$ .

O parâmetro  $\mu$  depende do risco não diversificado, intrínseco ao crescimento relativo do preço da própria Acção. A expectativa de grandes crescimentos induz o investidor a assumir elevados riscos. O parâmetro  $\mu$  depende ainda da taxa de juro associada pois, quanto maior ela for, maior é o crescimento esperado exigido a uma Acção. A determinação exacta do parâmetro  $\mu$  não é, contudo, decisiva pois que o valor de uma Opção não depende, em geral, de  $\mu$ .

Já a determinação *exacta* dos valores de  $r$  e de  $\sigma$  - taxa de juro instantânea de risco-zero e volatilidade do preço da Acção, respectivamente - se revela de grande importância no cálculo do valor de uma Opção associada à Acção.

Sendo a Fórmula de Black-Scholes extremamente sensível aos valores adoptados, tanto para a taxa de juro de risco-zero, como para a volatilidade do preço da Acção, uma qualquer estimativa dos parâmetros  $r$  e  $\sigma$ , deve ser muito precisa.

Procederemos, em seguida, ao ensaio de alguns métodos "empíricos" de estimação dos referidos parâmetros.

### 9.1. ESTIMATIVA DE $r$ .

Relativamente à taxa de juro de risco-zero ( $r$ ), duas situações podem ocorrer. Qualquer delas contraria o pressuposto do valor constante do parâmetro.

Assim, ou a evolução de  $r$  no tempo segue uma função que é conhecida - distinta da função constante -, ou a evolução de  $r$  no tempo é considerada aleatória seguindo um processo estocástico.

Na primeira situação, as fórmulas de Black-Scholes para a avaliação de Opções Call e Opções Put Europeias sobre Acções mantêm-se válidas conquanto se deva considerar - no que resta da vigência da Opção -, em vez do valor de  $r$ , o valor médio obtido a partir dos valores das taxas de juro de risco-zero, anteriormente observadas.

O estudo da avaliação de Opções no caso em que se admite que a evolução das taxas de juro ocorre de forma estocástica não será feito neste trabalho. No entanto, apresentar-se-á como apêndice a este Capítulo um modelo, devido a Merton, que considera a hipótese da taxa de juro estocástica - *Merton's Stochastic Interest Rate Model* [vd. Apêndice II].

### 9.2. ESTIMATIVA DE $\sigma$

No que respeita à volatilidade do preço de uma Acção, vários são os métodos de estimação possíveis.

### 9.2.1. HISTÓRICO DOS PREÇOS DA ACÇÃO

O primeiro baseia-se na análise do "histórico" de preços da Acção considerada. Ou seja, determina-se a volatilidade do preço de uma particular Acção em função dos preços observados no passado recente dessa mesma Acção. Este método utiliza os factores que afectam a volatilidade e incorpora a *tendência* da mesma ao longo do tempo.

Ora, do que anteriormente se disse, sabe-se que a distribuição *lognormal* do preço de uma Acção é dada por:

$$\ln[S(t+dt)] \sim N\left[\ln S(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt, \sigma^2 dt\right]$$

ou, o mesmo é dizer, por

$$\ln\left(\frac{S(t+dt)}{S(t)}\right) \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt, \sigma^2 dt\right]. \quad (3.11)$$

Considere-se, neste contexto,

$$v_i = \ln\left(\frac{s_i}{s_{i-1}}\right)$$

onde  $s_i$ , com  $i = 0, 1, \dots, n$ , representa a  $i$ -ésima observação do preço da Acção e  $dt$  simboliza o intervalo de tempo entre observações, medido em anos.

Uma estimativa usual da volatilidade de  $\ln\left(\frac{S(t+\tau)}{S(t)}\right)$  é dada pelo desvio padrão amostral corrigido

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2},$$

onde  $\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$ .

Como atendendo a (13),  $\sigma_A$  pode ser considerado um bom estimador de  $\sigma\sqrt{dt}$ , então

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma_A}{\sqrt{\tau}}$$

constituirá, também, um bom estimador de  $\sigma$ .

A definição do número<sup>(85)</sup> exacto de observações a ter em conta na estimação do parâmetro  $\sigma$  deve reflectir duas realidades: quanto maior for a dimensão da amostra, melhor será, em geral, a estimativa obtida; valores relativos a períodos muito afastados no tempo podem falsear a previsão de comportamentos futuros.

### 9.2.2. MÉTODO DAS VOLATILIDADES IMPLÍCITAS

O segundo método consiste no tratamento analítico dos próprios preços de mercado das Opções em causa. É conhecido pelo **Método das Volatilidades Implícitas**. A sua utilização permite incorporar informação determinante no seu valor, informação mais recente e até, talvez, conjuntural.

Fixando, de entre os valores observados da Opção, aquele que se supõe mais correcto<sup>(86)</sup>, e conhecidos os restantes factores determinantes do valor da mesma, é possível estimar, implicitamente,  $\sigma$ .

Com efeito, sendo  $c$  uma função crescente de  $\sigma$ , é sempre possível, com base num valor de partida inicialmente atribuído ao parâmetro, simular, sucessivamente, sobre o valor de  $c$  até encontrar o valor da verdadeira solução, antecipadamente conhecida, ou outra, que lhe seja próxima. O valor do parâmetro que lhe dá origem é, pois, o valor procurado.

A observação do valor de mercado de diferentes Opções, todas elas associadas a uma mesma Acção, conduz, necessariamente, a volatilidades implícitas distintas. Uma estimativa da volatilidade procurada pode ser obtida a partir do cálculo da média ponderada das diferentes volatilidades implícitas.

A escolha dos ponderadores deve reflectir o grau de sensibilidade dos diferentes valores da Opção à volatilidade da Acção associada.

<sup>(85)</sup> Estudos empíricos revelam que o número de observações não deve ser inferior a 16.

<sup>(86)</sup> Alguns autores sugerem a determinação da volatilidade implícita a partir, exclusivamente, da Opção mais *at-the-money*. Recorde-se que uma Opção diz-se *at-the-money* quando  $S(t) = X \exp[-r(T-t)]$ , ou seja, quando o valor presente da Acção associada coincide com o valor actualizado do preço do exercício.

Assim, é sugerido por muitos autores, como factor de ponderação, o uso das *elasticidades* do valor da Opção relativamente à volatilidade. Consegue-se, deste modo, atribuir maior peso às Opções cujos valores são mais sensíveis a uma hipotética alteração percentual da volatilidade.

O estimador proposto seria, então, dado por,

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \omega_i \sigma_i$$

onde,

$$\omega_i = \frac{(\partial x_i / \partial \sigma_i)(\sigma_i / c_i)}{\sum_{i=1}^n (\partial x_i / \partial \sigma_i)(\sigma_i / c_i)}$$

sendo  $n$  o número total das Opções consideradas sobre a mesma Acção,  $c_i$  o valor da Opção  $i$  e  $\sigma_i$ , a correspondente volatilidade implícita.

Um método de ponderação alternativo consiste em fazer,

$$\omega_i = \frac{(\partial x_i / \partial \sigma_i)}{\sum_{i=1}^n (\partial x_i / \partial \sigma_i)},$$

mantendo igual o restante cálculo.

### 9.2.3. OUTROS MÉTODOS

Mas existem outros métodos, porventura mais "empíricos", para a estimação da volatilidade do preço de uma Acção.

Assim, se a volatilidade do preço de uma Acção varia no tempo segundo uma função conhecida, então a Fórmula de Black-Scholes permanece válida desde que se substitua, no período que resta da vigência da Opção, o valor da variância,  $\sigma^2$ , pelo valor médio das variâncias<sup>(87)</sup> anteriormente observadas.

---

<sup>(87)</sup> "Setting  $\sigma^2$  equal to the average variance rate during the life of an option is not quite the same as setting  $\sigma$  (...)", Autor e ob. cit. nota 52, p. 452.

Um outro método de estimação da volatilidade, proposto por Parkinson, pressupõe a exclusiva utilização dos preços "extremos", isto é, dos valores mínimos (preços mais baixos) e dos valores máximos (preços mais elevados), observados nas Acções ao longo de  $n$  dias. Assim, sugeriu que se fizesse

$$\sigma = \frac{0,627}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{H_i}{L_i}\right)$$

representando  $H_i$  e  $L_i$ , respectivamente, os valores mais elevado e mais baixo observados no preço da Acção no  $i$ -ésimo dia considerado.

A lógica subjacente a este procedimento é a de que é possível restringir o período em observação a um passado mais recente valorizando, somente, os valores extremos nele observados. Além de melhorar a qualidade da estimação, verifica-se ainda que o estimador proposto é um estimador não enviesado de  $\sigma$ .

Um último processo consiste na determinação do valor  $\sigma$  que minimiza a função

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{M(t_i, X_i) - c(t_i, X_i)}{c(t_i, X_i)} \right|,$$

onde  $c(t_i, X_i)$  e  $M(t_i, X_i)$  representam, respectivamente, o valor de Black-Scholes de uma Opção  $i$  - com preço de exercício igual a  $X_i$  e data de expiração  $t_i$  -, e o correspondente preço de mercado.

## 10. CONCLUSÃO

No Capítulo III mostrou-se que a Equação Diferencial a ser satisfeita pelo valor de um Produto Derivado sobre um qualquer activo e, em particular, de uma Opção sobre uma Acção, pode ser obtida à custa de um *Portfolio* neutro ao risco formado a partir de posições negociais de sinal contrário, uma na própria Opção, a outra na Acção associada. O referido *Portfolio* só instantaneamente permanece livre de risco.

Concluiu-se ainda que a Equação Diferencial de Black-Scholes não depende do parâmetro  $\mu$ , o mesmo é dizer que é independente do crescimento esperado da Acção. Este facto contribuiu para a ideia de uma Economia Neutra ao Risco.



A Fórmula de Black-Scholes pôde, assim, ser deduzida, quer resolvendo a correspondente Equação Diferencial, quer utilizando, justamente, o princípio da existência de uma Economia Neutra ao Risco.

Os modelos que apresentamos neste Capítulo têm sido objecto de diversas críticas. Contesta-se, sobretudo, o facto de a média e a variância do rendimento instantâneo serem independentes quer da variável tempo, quer do preço do próprio *activo*, ou seja, manterem-se constantes.

Um outro factor de crítica relaciona-se com a circunstância de os modelos propostos não contemplarem a possibilidade de ocorrerem "saltos" nos preços dos *activos* pois, por definição, as trajectórias do Movimento Browniano são consideradas funções contínuas com probabilidade 1.

No Capítulo que se segue, faremos a generalização da *análise* de Black-Scholes a todo o tipo de *activos*.



## CAPÍTULO IV

# GENERALIZAÇÃO DA ANÁLISE DE BLACK-SCHOLES

### 1. INTRODUÇÃO

Os argumentos utilizados na derivação da Equação Diferencial de Black-Scholes assentam na possibilidade de se constituir um *Portfolio*, formado pelo próprio Produto Derivado - no caso, uma Opção - e pelo *activo* associado - no caso, uma Acção -, de tal forma conjugados que se consiga eliminar o risco.

Acontece, porém, que a possibilidade de constituição de um tal tipo de *Portfolios* depende da circunstância de a variável de estado representar o preço de *activos* transaccionáveis<sup>(88)</sup>. Se assim não for, o princípio da existência de um *Portfolio* Neutro ao risco pode não ser aplicável.

Cox e Ross procederam à generalização do estudo feito por Black e Scholes, estendendo-o, numa economia neutra ao risco, à avaliação de Produtos Derivados - e logo também de Opções - dependentes do valor de variáveis de estado referentes a *activos* não transaccionáveis.

A distinção entre variáveis de estado que representam o preço de *activos* transaccionáveis e outras que representam o preço de *activos*

---

<sup>(88)</sup> Ver nota (52).

não transaccionáveis, não deve, pois, ser ignorada na avaliação dos Produtos Derivados a que estão associados.

Com efeito, quando a variável de estado representa o preço de um *activo* transaccionável, o risco associado pode sempre ser eliminado. Por isso, a atitude dos investidores em nada influí na relação que se estabelece entre o preço do *activo* e o valor do Produto Derivado que lhe está associado e que se deseja calcular. O princípio da neutralidade ao risco é, pois, legitimamente aplicável na avaliação de Produtos Derivados sobre *activos* transaccionáveis.

Quando, por outro lado, a variável de estado representa o preço de um *activo* não transaccionável, o risco, e a atitude dos investidores perante ele, tornam-se relevantes, pelo que não se pode aplicar de forma imediata o mesmo princípio.

Neste Capítulo veremos, ainda, como o princípio da avaliação numa economia neutra ao risco pode também ser utilizado na avaliação de Produtos Derivados dependentes de uma ou mais variáveis de estado representativas, ou não, de *activos* transaccionáveis.

Em qualquer dos casos, o processo de avaliação assenta numa relação de equilíbrio que quantifica o *trade-off* existente entre a rendibilidade e o risco específicos de um qualquer Produto Derivado.

## 2. PRODUTOS DERIVADOS DE UMA VARIÁVEL DE ESTADO

### 2.1. PREÇO DE RISCO

Cox e Ross provaram que, em equilíbrio, os valores relativos a Produtos Derivados sobre uma mesma variável de estado, qualquer que ela seja, verificam, instantaneamente, a relação:

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda \quad (4.1)$$

onde  $\mu$  e  $\sigma$  representam, respectivamente, o *valor esperado* e a *volatilidade* da rendibilidade instantânea do Produto Derivado e onde  $\lambda$

aparece definido como o **Prémio de Risco** associado à variável de estado (*Market Price of Risk*).

Com efeito, consideremos  $\theta$  uma qualquer variável de estado - não necessariamente o preço de um activo transaccionável -, a qual, supõe-se, segue o seguinte processo estocástico,

$$\frac{d\theta}{\theta} = m(t, \theta)dt + s(t, \theta)dZ \quad (4.2)$$

onde  $m$  e  $s$  designam, respectivamente, a *tendência* ou crescimento esperado de  $\theta$  e a sua respectiva volatilidade, sendo  $dZ$  o processo de Wiener associado.

Admitamos ainda serem  $f_1$  e  $f_2$  os valores de dois Produtos Derivados dependentes, exclusivamente, da variável  $\theta$  e do tempo. Os processos estocásticos de  $f_1$  e  $f_2$  podem ser obtidos a partir do **Lema de Ito**.

Suponhamos que os mesmos são dados pelas relações

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{f_1} &= \mu_1 dt + \sigma_1 dZ \\ \frac{df_2}{f_2} &= \mu_2 dt + \sigma_2 dZ \end{aligned}$$

onde  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são funções de  $\theta$  e  $t$ , e  $dZ$  é o mesmo processo de Wiener da relação (4.2).

A discretização dos referidos processos pode ser escrita do seguinte modo:

$$\Delta f_1 = \mu_1 f_1 \Delta t + \sigma_1 f_1 \Delta Z \quad (4.3)$$

$$\Delta f_2 = \mu_2 f_2 \Delta t + \sigma_2 f_2 \Delta Z. \quad (4.4)$$

É possível eliminar o factor de risco,  $\Delta Z$ , promovendo a constituição de um *Portfolio* de risco (instantaneamente) nulo, formado por  $\sigma_2 f_2$  unidades do Produto Derivado  $f_1$  e  $(-\sigma_1 f_1)$  unidades do Produto Derivado  $f_2$ .

Assim, se se designar por  $\Pi$  o valor instantâneo do referido *Portfolio*, obter-se-á

$$\Pi = (\sigma_2 f_2) f_1 - (\sigma_1 f_1) f_2 \quad (4.5)$$

donde se tira

$$\Delta \Pi = (\sigma_2 f_2) \Delta f_1 - (\sigma_1 f_1) \Delta f_2$$

ou, o que é equivalente, substituindo  $\Delta f_1$  e  $\Delta f_2$  pelas relações (4.3) e (4.4),

$$\Delta \Pi = (\mu_1 \sigma_2 f_1 f_2 - \mu_2 \sigma_1 f_1 f_2) \Delta t. \quad (4.6)$$

Como o *Portfolio*  $\Pi$  é instantaneamente de risco-zero, a sua rendibilidade deve igualar aquela que de outro modo se obteria através de uma taxa de risco-zero, ou seja,

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t. \quad (4.7)$$

Por fim, substituindo na expressão (4.7) as relações (4.5) e (4.6), obteremos,

$$\mu_1 \sigma_2 - \mu_2 \sigma_1 = r \sigma_2 - r \sigma_1$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} = \lambda.$$

O Prémio de Risco  $\lambda$ , relativo a uma variável de estado  $\theta$ , quantifica o *trade-off* entre a rendibilidade e o risco dos Produtos Derivados dependentes da variável de estado  $\theta$ .

A relação  $\mu - r = \lambda \sigma$ , equivalente a (4.1), dá-nos uma interpretação intuitiva do que acabou de se dizer.

Com efeito, se pensarmos que a volatilidade  $\sigma$  não é mais do que a quantidade de risco- $\theta$  presente no valor de  $f$ , então  $\lambda \sigma$  equivale ao produto da quantidade de risco- $\theta$  pelo seu preço de mercado.

Neste contexto, a diferença  $\mu - r$ , representa o acréscimo esperado de rendimento, relativamente à taxa de risco-zero, que deve ser exigido por forma a compensar o risco em que se incorre investindo num qualquer Produto Derivado dependente da variável de estado  $\theta$ .

## 2.2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL

A equação (4.1), o Lema de Ito, e o processo estocástico relativo à variável de estado (4.2), permitem determinar a Equação Diferencial a ser satisfeita pelo valor de um qualquer Produto Derivado dependente de  $\theta$ .

Com efeito, se se admitir que o processo da variável de estado  $\theta$  é definido pela expressão (4.2) e que o correspondente processo da rendibilidade do Produto Derivado, obtido por aplicação do Lema de Ito, é definido por:

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sigma dZ \quad (4.8)$$

onde,

$$\mu f = \frac{\partial f}{\partial t} + m \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{2} s^2 \theta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (4.8a)$$

e

$$\sigma f = s \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (4.8b)$$

então, substituindo na equação (4.1) as relações (4.8a) e (4.8b) obtém-se:

$$\frac{1}{2} s^2 \theta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + (m - \lambda s) \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial t} = r f. \quad (4.9)$$

Caso a variável de estado  $\theta$  corresponda ao preço de um activo transaccionável, cuja variação no tempo se faça segundo um movimento geométrico Browniano onde  $m$  e  $s$  são considerados constantes, então, se o Produto Derivado  $f$  representar o valor de uma Opção, a Equação Diferencial (4.9) coincide com a Equação Diferencial de Black-Scholes, desde que se considere válida a relação:

$$m - \lambda s = r \quad (4.10)$$

ou, alternativamente,

$$m - \lambda s = r - q \quad (4.10a)$$

se se admitir que o activo - no caso a Acção - paga dividendos num montante  $q$  previamente conhecido.

O que se afirmou permite-nos pensar na generalização do conceito de avaliação numa economia neutra ao risco, mesmo quando tratamos com *activos* não transaccionáveis, bastando, para tal, que se proceda às convenientes e necessárias modificações no processo correspondente à variável de estado.

Cox e Ross propuseram a utilização do conceito de avaliação numa economia neutra ao risco, onde é suposto os investidores não exigirem nenhum prémio de risco, quaisquer que sejam os *activos* em causa, transaccionáveis ou não.

A avaliação de Produtos Derivados, através da simulação da evolução no tempo da variável de estado, pressupõe, neste caso, a modificação do processo seguido pela variável de estado.

O processo da variável de estado, numa economia neutra ao risco, consistente com a relação de equilíbrio (4.1), será, então, definido do seguinte modo:

$$\frac{d\theta}{\theta} = (m - \lambda s)dt + s dZ. \quad (4.11)$$

O procedimento utilizado na avaliação de um Produto Derivado, numa economia neutra ao risco, consiste, assim, em subtrair o factor  $\lambda s$  à tendência esperada da variável de estado, actuando-se a partir daí como se nos situássemos numa economia indiferente ao risco.

Com efeito, quando se altera o valor esperado,  $m$ , de uma variável de estado  $\theta$  para  $m - \lambda s$  [vd. (4.10)], outra coisa não fazemos senão contribuir para que ela passe a ter uma rendibilidade que iguale a que pode ser proporcionada por uma taxa de risco-zero  $r$ .

### 3. OPÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS DE ESTADO

#### 3.1 - PREÇO DE RISCO

Os Produtos Derivados dependentes de várias variáveis de estado podem também ser avaliados com base no princípio da neutralidade ao risco.

A generalização do **Lema de Ito** constitui o primeiro passo da referida extensão.

Assim, supondo a existência de  $n$  variáveis de estado,  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , as quais variam no tempo segundo processos estocásticos definidos por expressões do tipo:

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i dt + s_i dZ_i \quad (4.12)$$

onde  $m_i$ ,  $s_i$  e  $dZ_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , possuem o significado que já antes lhes foi atribuído, então, o processo - obtido através de um desenvolvimento em Série de Taylor - relativo ao valor de um Produto Derivado dependente das referidas variáveis será dado pela expressão:

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sum_i \sigma_i dZ_i \quad (4.13)$$

onde<sup>(89)</sup>,

$$\mu f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i m_i \theta_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \rho_{ij} s_i s_j \theta_i \theta_j \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad (4.13a)$$

$$\sigma_i f = s_i \theta_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \quad (4.13b)$$

e  $\rho_{ij}$  representa o coeficiente de correlação instantâneo entre as variáveis de estado  $\theta_i$  e  $\theta_j$ .

Por fim, a Equação Diferencial a que obedece o valor de um Produto Derivado é obtida considerando-se a existência de, pelo menos,  $n+1$  produtos *transaccionáveis*, dependentes das variáveis de estado  $\theta_i$ , sendo que um deles é, justamente, o Produto Derivado que se pretende avaliar.

A relação de equilíbrio entre os valores dos Produtos Derivados é neste contexto, definida pela expressão:

$$\mu - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i \quad (4.14)$$

<sup>(89)</sup> Dito de outra forma,  $\mu$  representa o rendimento esperado do derivado, e  $\sigma_i dZ_i$  a componente do risco que é imputável à variável  $\theta_i$ .



onde  $\lambda_i$  representa o Prémio de Risco atribuível à correspondente variável de estado  $\theta_i$ .

A expressão (4.14) quantifica o acréscimo esperado no rendimento que é exigido pelos investidores do Produto Derivado em função dos parâmetros  $\lambda_i$  e  $\sigma_i$ .

O produto  $\lambda_i \sigma_i$  estabelece a parte do acréscimo de rendimento que é devida à dependência do Produto Derivado relativamente à variável de estado  $\theta_i$ .

Assim, se  $\lambda_i \sigma_i = 0$ , então é porque é nulo o peso da variável de estado  $\theta_i$  no valor final do Derivado. Caso  $\lambda_i \sigma_i > 0$ , então deve exigir-se um acréscimo de rendimento como consequência do aumento de risco imputável à variável  $\theta_i$ . Finalmente, se  $\lambda_i \sigma_i < 0$ , deverá concluir-se que a dependência do *Produto Derivado* relativamente à variável de estado  $\theta_i$  permite reduzir<sup>(90)</sup>, e não aumentar, o risco inerente ao investimento em causa.

### 3.2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL

As relações (4.13a), (4.13b) e (4.14) estabelecem a Equação Diferencial do valor de um Produto Derivado dependente de várias variáveis de estado, e que é a seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i (m_i - \lambda_i \sigma_i) \theta_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \theta_i \theta_j \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = rf. \quad (4.15)$$

A solução desta Equação Diferencial depende, como noutras situações já estudadas, da definição das condições fronteira relativas ao Produto Derivado que se pretende avaliar.

O princípio da avaliação numa economia neutra ao risco pode igualmente ser aplicado a esta última situação.

Assim, no processo de avaliação de um qualquer Produto Derivado, dependente das variáveis de estado  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , é sempre possível proceder como se integrássemos uma economia neutra ao

<sup>(90)</sup> Por exemplo, "The returns on stocks and bonds in a typical portfolio are negatively related to changes in interest rates", HULL, J.C., "Options, Futures and other Derivative Securities", 2nd Edition, p. 278.

risco, desde que consideremos a *tendência* ou crescimento esperado de  $\theta_i$  igual a  $m_i - \lambda_i s_i$  em vez de  $m_i$ , mantendo, por outro lado, inalteradas quer a volatilidade  $s_i$  de  $\theta_i$ , quer o coeficiente de correlação,  $\rho_{ik}$ , existente entre duas variáveis  $\theta_i$  e  $\theta_k$ , quaisquer que sejam  $i$  e  $k$ .

Dito de outra forma, o valor de um qualquer Produto Derivado pode sempre ser calculado "actualizando" à taxa de risco-zero,  $r$ , o seu valor esperado à data de expiração,  $E[f_T]$ , ou seja,

$$f = e^{-r(T-t)} \hat{E}[f_T]$$

onde  $\hat{E}$  designa o valor esperado numa economia neutra ao risco, isto é, numa economia onde o crescimento de uma variável de estado  $\theta_i$  seja igual a  $m_i - \lambda_i s_i$ .

#### 4. CONCLUSÃO

A ideia fundamental expressa neste Capítulo consiste na generalização do princípio, anteriormente utilizado na avaliação de Opções sobre Acções, da existência de uma economia neutra ao risco.

A generalização deste princípio a um qualquer Produto Derivado, afirma que a avaliação do mesmo é sempre possível de ser feita como se nos situássemos num universo indiferente ao risco, desde que, para tanto se subtraia ao crescimento esperado de cada variável de estado associada, o valor que resulta do produto da sua volatilidade pelo seu próprio prémio de risco.

No Capítulo V, começaremos por analisar como o pressuposto da *lognormalidade* do preço de uma Acção pode induzir desvios comprometedores em relação ao valor exacto de uma Opção.

Beneficiando do que se afirmou no Capítulo IV, terminaremos apresentando - entre outros Métodos Alternativos de Avaliação de Opções - o Método da Volatilidade Estocástica. Este último método considera a variação estocástica conjunta do preço do activo e da respectiva volatilidade.

## CAPÍTULO V

# MODELOS ALTERNATIVOS DE AVALIAÇÃO DE UMA OPÇÃO

### 1. INTRODUÇÃO

O modelo de Black-Scholes baseia-se, entre outras premissas de partida<sup>(91)</sup>, nos pressupostos de que a distribuição de probabilidade da variável de estado - no caso, o preço da Acção associada à Opção - segue uma função *lognormal*, e que a volatilidade do preço da Acção é constante.

Parece intuitivo que a não verificação, na prática, de algum ou alguns dos pressupostos gerará, necessariamente, *enviesamentos* entre o exacto valor da Opção e aquele que se obtém utilizando a Fórmula de Black-Scholes.

Assim, assume particular interesse reflectir, por exemplo, no que sucederá caso o pressuposto da *lognormalidade* do preço da Acção não se revele completamente correcto. Seguramente, ocorrerão *enviesamentos* nos valores calculados que importa qualificar e quantificar.

Neste Capítulo estudam-se algumas alternativas ao modelo de Black-Scholes. Alternativas, no fundo, também, ao pressuposto de que a evolução no tempo do preço de uma Acção se faz segundo um movimento Browniano Geométrico. Neste contexto, analisaremos o

---

<sup>(91)</sup> Por exemplo, não pagamento de dividendos, taxa de juro fixa, volatilidade do preço da Acção constante.

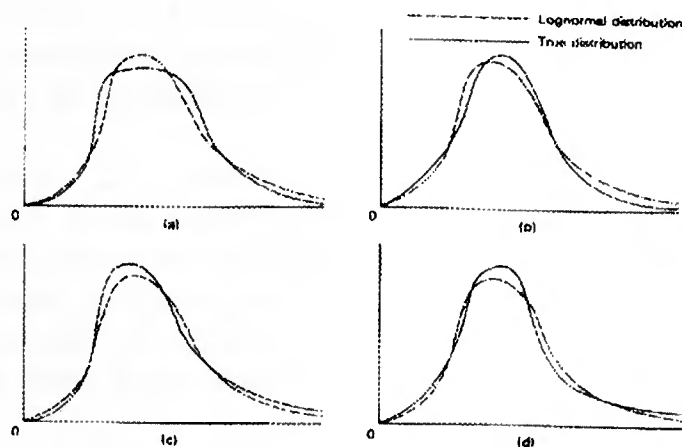
chamado Modelo da Volatilidade Estocástica. Utilizá-lo-emos para qualificar os *enviesamentos* observados nos valores de Black-Scholes das Opções.

Referiremos ainda outros métodos alternativos<sup>(92)</sup>, tais como: o *Compound Option Model* que considera os "Capitais Próprios" das empresas como sendo Opções sobre os seus próprios "activos"; o *The Pure Jump Model* onde se supõe que os preços das Acções experimentam movimentos descontínuos ou saltos ("jumps") ou, até mesmo, movimentos contínuos que admitem a ocorrência pontual de saltos, no caso, o *The Jump Diffusion Model*.

## 2. DESVIOS NOS VALORES ("PRICING BIASES")

O factor crítico na determinação do valor de uma Opção Europeia sobre uma Acção centra-se, conforme já referido, na identificação, o mais rigorosa possível, da função de distribuição de probabilidades do preço da Acção associada. Até ao momento, assumiu-se que um tal processo segue uma função *lognormal*.

Analisaremos de seguida as consequências da não confirmação do pressuposto da *lognormalidade*, estudando os *enviesamentos* que daí, necessariamente, resultam. Para tanto, utilizaremos um procedimento idêntico ao que foi usado por Jarrow e Rudd<sup>(93)</sup>.



**Figura 5.1** Distribuições de probabilidade alternativas

<sup>(92)</sup> "Assumptions about the effect of information on asset price changes lead to valuation models based on a variety of stochastic processes.", cf. GESKE, R. e SHASTRI, K., "Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques" in *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, p.1.

<sup>(93)</sup> JARROW, R. e RUDD, A., "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes", in *Journal of Financial Economics*, 10 (November 1982), pp. 347 a 369.

Na Figura 5.1 consideram-se quatro diferentes formas de a verdadeira função de distribuição de probabilidade do preço de uma Acção não coincidir plenamente com a função *lognormal*. Em qualquer dos casos, admite-se que as distribuições consideradas apresentam igual valor esperado (média) e idêntico desvio padrão que a função *lognormal*.

Na 1ª hipótese [Figura 5.1-a)] supõe-se que ambas as extremidades da verdadeira função de distribuição são mais achatadas que as extremidades homólogas da função *lognormal*; na 2ª hipótese [Figura 5.1-d)] admite-se exactamente o inverso da 1ª hipótese; nas 3ª e 4ª hipóteses [Figuras 5.1-b) e 5.1-c)] uma das extremidades é mais achatada e a outra menos.

Analisemos agora os *enviesamentos* resultantes da aplicação da Fórmula de Black-Scholes quando a verdadeira distribuição dos preços da Acção coincide com uma das hipóteses anteriormente identificadas.

Consideremos, para isso, e em primeiro lugar, uma Opção Call Europeia, supondo-a claramente *out-of-the-money*. O seu valor (nulo) só será positivo se entretanto ocorrer um aumento significativo do preço da Acção associada. Dito de outra forma, o valor da Opção depende exclusivamente da extremidade direita da função de distribuição. Quanto menos achatada for a referida extremidade, maior será a probabilidade de ocorrerem valores elevados de  $S$  e, logo, também será maior o valor da própria Opção.

Neste contexto, a Fórmula de Black-Scholes tenderá a subavaliar Opções Call claramente *out-of-the-money* nas condições c) e d), e a sobreavaliá-las nas hipóteses a) e b).

No caso de uma Opção Put Europeia claramente *out-of-the-money*, o seu valor só será positivo se ocorrer uma diminuição significativa no preço da Acção associada. Assim sendo, o valor da Opção dependerá, fundamentalmente, do traçado relativo à extremidade esquerda da função de distribuição do preço da Acção. Quanto menos achatada for a referida extremidade, mais valiosa será a Opção.

A Fórmula de Black-Scholes tem, assim, tendência a subavaliar Opções Put claramente *out-of-the-money* no caso de se verificarem as condições b) e d), sobreavaliando-as nas hipóteses a) e c).

Obtêm-se os correspondentes *enviesamentos* para as Opções Call e Put *in-the-money* utilizando a relação de paridade Call-Put.

A referida relação, recorde-se, escreve-se nas notações habituais, da seguinte forma:

$$p + S = c + Xe^{-r(T-t)}.$$

Como é sabido, esta relação de equilíbrio entre o valor das Opções Call e Put não depende da exacta função de distribuição do preço das Acções, qualquer que ela seja.

A partir da relação citada, é possível concluir que se uma Opção Call (Put) Europeia de valor  $c$  ( $p$ ) está *out-of-the-money*, então a correspondente Opção Put (Call) de valor  $p$  ( $c$ ) estará, por certo, *in-the-money*.

Consequentemente, uma Opção Put Europeia *in-the-money*, quando avaliada pela Fórmula de Black-Scholes, deve revelar os mesmos desvios de valor que a Opção Call Europeia homóloga *out-of-the-money*.

De igual modo, concluir-se-á que toda a Opção Call Europeia *in-the-money* avaliada à custa da Fórmula de Black-Scholes, evidencia desvios de valor idênticos aos observados nas Opções Put Europeias *out-of-the-money*.

### 3. MODELO DA VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA

Estudos de simulação e alguns resultados empíricos evidenciaram a importância dos chamados Modelos de Volatilidade Estocástica na minimização dos enviesamentos resultantes da aplicação da Fórmula de Black-Scholes.

Os modelos de volatilidade estocástica admitem que as variações observadas no valor de uma qualquer Opção são consequência de movimentos incertos, aleatórios, quer do preço da Acção associada, quer da sua volatilidade, ou de ambos os factores. Tais modelos obrigam à especificação de dois processos estocásticos distintos: um relativo ao preço da Acção, outro à volatilidade da mesma.

Assim, admita-se que o preço da Acção,  $S(t)$ , e a correspondente variância,  $\sigma^2(t)$ , satisfazem, respectivamente, as seguintes equações diferenciais estocásticas:



$$dS(t) = \mu(t, S(t), V(t)) \cdot S(t)dt + S(t) \sqrt{V(t)} dZ(t); \quad (5.1)$$

$$d\sigma^2(t) = \phi(t, V(t)) \cdot V(t)dt + \xi(t, V(t)) V(t) dW(t) \quad (5.2)$$

onde  $Z$  e  $W$  representam dois Movimentos Brownianos Padrão com coeficiente de correlação  $\rho$  e  $V(t) = \sigma^2(t)$ .

Deve notar-se que os parâmetros<sup>(94)</sup>  $\phi$  e  $\xi$  dependem de  $t$  e de  $\sigma(t)$  mas não de  $S(t)$ .

O processo estocástico seguido pela variância reflecte a circunstância de  $\sigma^2$  nunca assumir valores negativos.

Assim, quando o valor de  $\sigma^2$  tender para zero também o seu desvio padrão deverá tender para o mesmo valor.

### 3.1. DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARA O VALOR DE UMA OPÇÃO CALL SOBRE UMA ACÇÃO.

Representemos por  $c(t, S(t), \sigma(t))$  o valor da Opção Call em estudo.

A notação adoptada pretende evidenciar a dependência do valor da Opção relativamente à volatilidade do preço da Acção associada - e não em relação à variância  $\sigma^2$ .

A partir do Lema de Ito Generalizado [vd. **Anexo Matemático**] obtém-se a Equação Diferencial Estocástica para o valor da Opção Call.

A sua expressão (5.3) é a seguinte:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{\partial c}{\partial V} dV + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} V S^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial V^2} \xi^2 V^2 dt + \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial V} \rho \xi V^{3/2} S dt$$

Pense-se agora, como já anteriormente se fez, num *Portfolio* neutro ao risco formado à custa de:

- uma posição *longa* em  $\partial c / \partial S$  Acções;
- uma posição *curta* na correspondente Opção Call .

<sup>(94)</sup> Quando  $\phi = \xi = 0$  obtém-se a formulação já estudada de Black-Scholes.

A variação no valor do *Portfolio*,  $d\Pi$ , num intervalo de tempo  $dt$ , é dada pela relação

$$d\Pi = \frac{\partial c}{\partial S} dS - dc$$

ou, o que é equivalente, pela relação

$$d\Pi = -\eta dt - \frac{\partial c}{\partial \sigma^2} \xi V dW \quad (5.4)$$

onde

$$\eta = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial V} \phi V + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} V S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial V^2} \xi^2 V^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial V} \rho \xi V^{3/2} S \quad (5.5)$$

expressão a que se chega tomando em consideração a Equação Diferencial Estocástica (5.1) e substituindo  $dc$  pela relação (5.3).

A presença na relação (5.4) do termo  $dW$  significa que já não é possível formar, à custa de um conjunto de Opções e das correspondentes Acções associadas, um *Portfolio* neutro ao risco, isto é, cuja variação seja certa num intervalo infinitesimal de tempo. Tal sucede porque deixou de ser constante a volatilidade do preço da Acção.

Este facto nem é de estranhar. Com efeito, quando a volatilidade do preço de uma Acção é aleatória, a atitude dos investidores em relação ao risco acaba, necessariamente, por ser determinante na "valoração" da própria Opção. Ou seja, o seu valor dependerá dos diferentes níveis evidenciados de adesão ou rejeição ao risco.

Não obstante o que acabou de se afirmar, vários autores defendem a tese de que o risco inerente à volatilidade do preço das Acções pode e deve ser ignorado, obtendo-se, neste caso, uma Equação Diferencial para o valor de uma Opção que é independente das preferências dos investidores.

Uns afirmam que a volatilidade não é correlacionável com o consumo agregado, pelo que o risco sistemático por ela induzido deve ser considerado nulo; outros assumem, pura e simplesmente, que todo o risco num *Portfolio* de títulos é diversificável.

No que se segue, admite-se que toda e qualquer variação observada no valor do *Portfolio* que seja imputável à aleatoriedade da volatilidade é susceptível de ser diversificada [vd. Capítulo IV]. Por isso, o rendimento esperado do *Portfolio* é igual à taxa de juro instantânea de risco-zero,  $r$ .



Dito de outra forma,

$$E\left(\frac{d\Pi}{\Pi}\right) = rdt \quad (5.6)$$

onde  $r$ , repete-se, representa a taxa de juro de risco-zero do mercado.

Ora, atendendo a que, por força do que anteriormente se disse,  $E(dW) = 0$ , e ainda a que  $\Pi = \frac{\partial c}{\partial S}S - c$ , então, da relação (5.6) tira-se:

$$\frac{-\mu dt}{\frac{\partial c}{\partial S}S - c} = rdt$$

ou seja, que

$$\mu = rc - \frac{\partial c}{\partial S}rS. \quad (5.7)$$

Por fim, das relações (5.5) e (5.7) obtém-se a Equação Diferencial Estocástica do valor de uma Opção Call

$$\frac{\partial c}{\partial t} = rc - \frac{\partial c}{\partial S}rS - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} V^2 S^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial V^2} \xi^2 V^2 - \frac{\partial c}{\partial V} \phi V - \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial V} \rho \xi V^{3/2} S \quad (5.8)$$

a que se junta a *condição fronteira* do valor da mesma Opção

$$c(T, S(T), \sigma(T)) = \max[0, S(T) - X].$$

A independência das duas últimas expressões em relação ao parâmetro que define o grau de risco aceite pelo investidor, resulta, pois, evidente. Tal facto possibilita a avaliação da Opção considerando a existência de uma Economia Neutra ao Risco. É o que faremos de seguida.

### 3.2. VALOR EXACTO DA OPÇÃO EM FUNÇÃO DO SEU VALOR DE BLACK-SCHOLES

Três hipóteses distintas são consideradas: ou o preço da Acção está instantaneamente *não correlacionado* com a volatilidade, caso em que  $\rho = 0$ ; ou, pelo contrário, existe *correlação*, que tanto pode ser positiva,  $\rho > 0$ , como negativa,  $\rho < 0$ .

### 3.2.1. VALOR DA OPÇÃO SUPONDO O PREÇO DA ACÇÃO E A VOLATILIDADE NÃO CORRELACIONADOS

Demonstrar-se-á, admitindo que se verifica a primeira das hipóteses consideradas, que o exacto valor de uma Opção coincide com o *valor esperado* do valor de Black-Scholes da mesma Opção, calculado em função da distribuição da variância média da Acção associada no tempo que resta até à sua extinção.

Com efeito, e atendendo ao que se afirmou com respeito à neutralidade ao risco, é possível determinar o valor de  $c(t, S, \sigma)$  calculando o valor *actualizado* - à taxa de juro de risco-zero - do *valor esperado* da Opção à data de vencimento.

Dito de outra forma, o valor da Opção Call é dado por

$$c(t, S(t), \sigma(t)) = \exp[r(t-T)] \int_0^{+\infty} c(T, S(T), \sigma(T)) \cdot f(S(T)|_{S(t), \sigma^2(t)}) dS(T) \quad (5.9)$$

onde  $c(T, S(T), \sigma(T)) = \max[0, S(T) - X]$  representa o valor da Opção à data de expiração e  $f(S(T)|_{S(t), \sigma^2(t)})$  a função densidade de probabilidade de  $S(T)$  condicionada por  $S(t)$  e  $\sigma^2(t)$ .

A função de densidade  $f(S(T)|_{S(t), \sigma^2(t)})$  é susceptível de ser reescrita, omitindo a dependência de  $S(T)$  em relação a  $S(t)$ , da seguinte maneira:

$$f(S(T)|_{\sigma^2(t)}) = \int_0^{+\infty} g(S(T)|_{\bar{V}}) h(\bar{V}|_{\sigma^2(t)}) d\bar{V}$$

onde  $\bar{V}$  designa a variância média relativa ao período de tempo que resta até à expiração da Opção. Isto é,

$$\bar{V} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau. \quad (5.10)$$

A expressão (5.9) pode ainda, e por fim, escrever-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} c(t, S(t), \sigma(t)) &= \exp[r(t-T)] \int_0^{+\infty} c(T, S(T), \sigma(T)) \cdot \left[ \int_0^{+\infty} g(S(T)|_{\bar{V}}) h(\bar{V}|_{\sigma^2(t)}) d\bar{V} \right] dS(T) \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ \exp[r(t-T)] \int_0^{+\infty} c(T, S(T), \sigma(T)) \cdot g(S(T)|_{\bar{V}}) dS(T) \right] h(\bar{V}|_{\sigma^2(t)}) d\bar{V} \end{aligned}$$

$$= \int_0^{-\infty} c(\bar{V}) h(\bar{V} |_{\sigma^2(t)}) d\bar{V} = E[c(\bar{V})] \quad (5.11)$$

pois, como por hipótese  $\rho=0$ , então  $S(\bullet)$  e  $\sigma(\bullet)$  são independentes e, logo,  $g(S(T)|_{\bar{V}}) = g(S(T))$ , o que explica a obtenção do valor  $c(\bar{V})$ .

A relação (5.11) estabelece, como se afirmou, que o valor exacto de uma Opção<sup>(95)</sup> Call é o *valor esperado* do valor de Black-Scholes da mesma Opção, calculado em função da distribuição da variância média da Acção associada, no tempo que resta até à sua extinção.

A determinação da expressão analítica exacta da distribuição de  $\bar{V}$ ,  $h(\bar{V} |_{\sigma^2(t)})$ , considerando um conjunto de pressupostos aceitáveis é, segundo Hull e White, impossível de ser conseguida.

Os mesmos autores consideram, no entanto, possível a determinação dos momentos de  $\bar{V}$  (média, variância) quando os parâmetros  $\varphi$  e  $\xi$  da equação diferencial (5.2) são tomados constantes.

Assim, desenvolvendo  $c(\bar{V})$  em série de Taylor é possível obter-se, na vizinhança do *valor esperado*, uma boa aproximação ao valor exacto da Opção em estudo. Hull e White afirmam mesmo que para valores  $\xi^2(T-t)$  suficientemente pequenos, o referido desenvolvimento converge rapidamente para o valor exacto da Opção. O desconhecimento do número de termos necessários à obtenção de uma boa aproximação, por um lado, e o interesse em avaliar a Opção considerando valores de  $\xi$  distintos daqueles a que a condição anterior obriga, por outro, levar-nos-á à utilização de um procedimento de cálculo mais genérico, o qual passa por um estudo de Simulação.

### 3.2.1.1. PROPRIEDADES DO VALOR DE UMA OPÇÃO

Importa agora proceder à análise de sensibilidade do valor exacto de uma Opção relativamente a possíveis variações observadas nos valores de  $S(t)$ ,  $X$ ,  $r$ ,  $\tau = T - t$ ,  $\mu$ ,  $\varphi$  e  $\xi$ .

No que respeita às Opções Call, e dada a relação (11), infere-se que o referido estudo de sensibilidade depende do comportamento

(95) De modo idêntico, poder-se-á demonstrar que o valor exacto de uma Opção Put Europeia coincide com o seu valor de Black-Scholes integrado em relação à distribuição da variância média da Acção associada, no período que resta da sua vigência. Isto é,

$$p(t, S(t), \sigma(t)) = \int_0^{-\infty} p(\bar{V}) h(\bar{V} |_{\sigma^2(t)}) d\bar{V} = E[p(\bar{V})]. \quad (5.11')$$

observado na função de densidade,  $h(\bar{V}|_{\sigma^2(t)})$ , face a hipotéticas variações nos mesmos parâmetros.

Acontece que a aludida função não depende de  $S(t)$  - por se terem considerado os parâmetros  $\varphi$  e  $\xi$  independentes de  $S(t)$  [Vd. (5.2)] - nem, tão pouco, depende de  $X$  ou de  $r$  [vd. (5.10)].

Assim, sendo  $h(\bar{V}|_{\sigma^2(t)})$ , por definição, não negativa, e recordando que o valor de Black-Scholes de uma Opção Call,  $c(t, S(t))$ , é função monótona crescente relativamente a  $S(t)$  e  $r$ , e decrescente em relação a  $X$ , então também  $c(t, S(t), \sigma(t)) = E[c(\bar{V})]$  obedece à mesma monotonia, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[c(\bar{V})]}{\partial S} &= E\left[\frac{\partial c(\bar{V})}{\partial S}\right] > 0; \\ \frac{\partial E[c(\bar{V})]}{\partial r} &= E\left[\frac{\partial c(\bar{V})}{\partial r}\right] > 0; \\ \frac{\partial E[c(\bar{V})]}{\partial X} &= E\left[\frac{\partial c(\bar{V})}{\partial X}\right] < 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, é intuitiva a prova de que o valor de uma Opção Call aumenta quando aumentam os valores de  $\tau$ ,  $\sigma^2$  e  $\varphi$ . Ou seja, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[c(\bar{V})]}{\partial \tau} &> 0; \\ \frac{\partial E[c(\bar{V})]}{\partial \sigma^2} &> 0; \\ \frac{\partial E[c(\bar{V})]}{\partial \varphi} &> 0.\end{aligned}$$

Nada pode ser dito quanto ao valor de  $\frac{\partial E[c(\bar{V})]}{\partial \xi}$ , que tanto pode ser positivo como negativo.

Um raciocínio semelhante sobre Opções do tipo Put [vd.(5.11')] conduzir-nos-ia aos resultados que se seguem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[p(\bar{V})]}{\partial S} &= E\left[\frac{\partial p(\bar{V})}{\partial S}\right] < 0; \\ \frac{\partial E[p(\bar{V})]}{\partial r} &= E\left[\frac{\partial p(\bar{V})}{\partial r}\right] < 0; \\ \frac{\partial E[p(\bar{V})]}{\partial X} &= E\left[\frac{\partial p(\bar{V})}{\partial X}\right] > 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[p(\bar{V})]}{\partial \tau} &> 0; \\ \frac{\partial E[p(\bar{V})]}{\partial \sigma^2} &> 0; \\ \frac{\partial E[p(\bar{V})]}{\partial \phi} &> 0,\end{aligned}$$

nada podendo afirmar-se de novo quanto ao valor de  $\frac{\partial E[p(\bar{V})]}{\partial \xi}$ .

Dito de outra forma, e em resumo, o valor de uma Opção Call é função crescente do preço corrente da Acção associada, da taxa de juro, do tempo disponível até à expiração da Opção, da volatilidade da Acção, e da própria tendência infinitesimal da volatilidade, sendo função decrescente do preço de exercício da Opção.

No que respeita ao valor de uma Opção Put, ele é função crescente do preço de exercício da Opção, do tempo disponível até ao vencimento da Opção, da volatilidade da Acção e da própria tendência infinitesimal da volatilidade, sendo função decrescente do preço corrente da Acção associada e da taxa de juro.

### 3.2.1.2. ESTUDO DA RELAÇÃO ENTRE O VALOR DE BLACK-SCHOLES DE UMA OPÇÃO E O VALOR EXACTO<sup>(96)</sup> DA OPÇÃO

Procederemos em seguida ao estudo comparativo entre o valor de Black-Scholes de uma Opção Call, tomando para volatilidade o *valor esperado* da variância média do preço da Acção, ou seja,  $c[E(\bar{V})]$ , e o

<sup>(96)</sup> Supondo que o valor exacto referido é plenamente determinado a partir do Modelo de Volatilidade Estocástica.

valor que se admite ser o valor exacto da Opção, obtido através do Modelo de Volatilidade Estocástica, isto é,  $E[c(\bar{V})]$ .

Demonstrar-se-á que a Fórmula de Black-Scholes tende a sobrevalorizar Opções Call *at-the-money* e a subvalorizar quer as Opções Call *deeply-in-the-money*, quer as Opções Call *deeply-out-of-the-money*.

Comecemos pelo estudo da curvatura da função  $c(\bar{V})$ .

Consideremos, para o efeito, a segunda derivada da função  $c(t, S(t))$  em ordem ao parâmetro  $\sigma^2$  avaliada em  $\bar{V}$ . Obter-se-á

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2}(\bar{V}) = c''(\bar{V}) = \frac{S\sqrt{T-t}}{4\bar{V}^{3/2}} \Phi'(d_1)(d_1 d_2 - 1) \quad (5.12)$$

sendo  $d_1$  e  $d_2$  definidos como em (3.8) [vd. Capítulo III].

O "ponto de inflexão" da curvatura de  $c(\bar{V})$  é obtido fazendo  $c''(\bar{V}) = 0$ , o que, de acordo com a relação (12), acontece quando  $d_1 d_2 - 1 = 0$ .

Ora, notando que  $d_2 = d_1 - \sqrt{\bar{V}(T-t)}$ , facilmente se obtém o "ponto de inflexão" procurado, cuja expressão é dada por:

$$\bar{V} = \frac{2}{T-t} \left[ \sqrt{1 + \left[ \log\left(\frac{S}{X}\right) + r(T-t) \right]^2} - 1 \right], \quad (5.13)$$

o qual será, de agora em diante, designado por  $I$ .

Com efeito, se se tomarem valores de  $\bar{V} > I$ , então obtém-se  $c''(\bar{V}) < 0$ , sendo, por isso, e no referido domínio,  $c(\bar{V})$  uma função côncava relativamente a  $\bar{V}$ .

Quando, pelo contrário, os valores considerados de  $\bar{V}$  são tais que  $\bar{V} < I$ , então obtém-se  $c''(\bar{V}) > 0$ , sendo que, para tais valores,  $c(\bar{V})$  é uma função convexa relativamente a  $\bar{V}$ .

Consideremos agora uma Opção Call *at-the-money*, isto é, uma Opção tal que  $S = X \exp[r(t-T)]$ .

Da relação (13) tira-se que  $I = 0$ . Ora, como por definição,  $\bar{V}$  só assume valores positivos, então, necessariamente,  $\bar{V} > I$ . Desta última desigualdade e do que anteriormente se disse, conclui-se que  $c(\bar{V})$  é uma função côncava de  $\bar{V}$ , qualquer que seja a sua distribuição.

Finalmente, e porque da definição de função côncava se sabe que  $E[c(\bullet)] < c[E(\bullet)]$ , conclui-se que o valor exacto de uma Opção Call,  $E[c(\bar{V})]$ , será sempre inferior ao seu valor de Black-Scholes,  $c[E(\bar{V})]$ .

Dito de outra forma, provou-se que a Fórmula de Black-Scholes sobrevaloriza as Opções Call *at-the-money*.

Pensemos agora no caso de uma Opção Call *deeply-in-the-money*, ou, alternativamente, *deeply-out-of-the-money*. Ou seja, admitamos uma Opção Call tal que  $S \gg X$  - no primeiro caso - ou, tal que  $S \ll X$  - no segundo caso.

Como consequência  $\log(S/X) \rightarrow +\infty$ , pelo que [vd. (13)] o valor de  $I$  pode considerar-se arbitrariamente grande e, logo, ter-se-á também que  $\bar{V} < I$ . Assim,  $c(\bar{V})$  será uma função convexa de  $\bar{V}$ , resultando daí, por definição de convexidade, que  $E[c(\bar{V})] > c[E(\bar{V})]$ .

Dito de outra maneira, o valor exacto de uma Opção Call é sempre superior ao valor de Black-Scholes calculado com base na variância  $E[\bar{V}]$ . Ou seja, a Fórmula de Black-Scholes subvaloriza Opções Call *deeply-in-the-money* ou *deeply-out-of-the-money*.

### 3.2.2. VALOR DA OPÇÃO SUPONDO O PREÇO DA ACÇÃO E A VOLATILIDADE CORRELACIONADOS

A hipótese da volatilidade e do preço da Acção estarem correlacionados foi estudada por Hull e White que, para o efeito, utilizaram métodos numéricos, tais como o Método de Monte Carlo ou, até, o desenvolvimento em Série de Taylor da função  $c(t, S(t), \sigma(t))$ .

Quando a correlação é positiva, isto é, quando  $\rho > 0$ , Hull e White verificaram que a Fórmula de Black-Scholes tende a sobreavaliar as

Opções Put *out-of-the-money*<sup>(97)</sup> e a subavaliar as Opções Call *out-of-the-money*<sup>(98)</sup>.

Já quando a correlação é negativa, ou seja, quando  $\rho < 0$ , aqueles autores constataram que a Fórmula de Black-Scholes tende a sobreavaliar as Opções Call *out-of-the-money*<sup>(99)</sup> e a subavaliar Opções Put *out-of-the-money*<sup>(100)</sup>.

Em qualquer dos casos, a justificação é simples.

Assim, se  $\rho > 0$ , a um aumento do preço da Acção corresponde um aumento da volatilidade. Como consequência, os preços mais elevados de uma Acção possuem, na realidade, uma probabilidade maior de ocorrer do que aquela que o movimento Browniano efectivamente lhes atribui.

Analogamente, a uma diminuição do preço da Acção corresponde também uma diminuição da volatilidade. Tal significa que os preços mais baixos de uma Acção são, de facto, menos prováveis de acontecer do que é suposto no movimento Browniano.

Se  $\rho < 0$ , então, a preços da Acção mais elevados correspondem volatilidades mais baixas, o que os torna, na realidade, menos prováveis de ocorrer do que o suposto pelo Movimento Browniano.

Por outro lado, a uma diminuição do preço da Acção corresponde um aumento da volatilidade, devendo atribuir-se aos preços mais baixos da Acção maior probabilidade de ocorrerem do que aquela que o Movimento Browniano lhes confere.

As Figuras 1-c) e 1-b) tipificam, exemplarmente, aquilo a que podemos chamar a verdadeira distribuição de  $S(t)$  assumindo que a correlação entre o preço da Acção e a volatilidade da mesma é, respectivamente, positiva e negativa.

#### 4. OUTROS MODELOS ALTERNATIVOS

Apresentam-se de seguida alguns modelos alternativos de avaliação de Opções sobre Acções. Cada um deles reflecte uma distinta interpretação do modo como evolui no tempo o preço da Acção associada à Opção.

<sup>(97)</sup> E, logo, tende também a sobreavaliar Opções Call *in-the-money*.

<sup>(98)</sup> E, logo, tende também a subavaliar Opções Put *in-the-money*.

<sup>(99)</sup> E, logo, tende também a sobreavaliar Opções Put *in-the-money*.

<sup>(100)</sup> E, logo, tende também a subavaliar Opções Call *in-the-money*.



Todo o modelo será classificado de acordo com os *enviesamentos* produzidos comparativamente aos valores homólogos de Black-Scholes.

#### 4.1. MODELO DA OPÇÃO COMPOSTA

O primeiro dos modelos alternativos a ser referido é o Modelo da Opção Composta (*compound option model*).

Neste considera-se que a *situação líquida* de uma empresa com capitais alheios ("levered firm") pode sempre ser interpretada como sendo uma Opção Call sobre o valor da própria empresa.

Para melhor compreender o que acabou de se afirmar, considere-se  $V$  o valor da referida empresa e  $A$ , o valor conhecido da dívida a terceiros ("bondholders"). Admita-se ainda que toda a dívida expira numa mesma data  $T^*$ .

Assim, se no instante  $T^*$ ,  $V < A$ , então o valor dos capitais próprios, ou seja, a situação líquida da empresa, no referido momento, será igual a zero, pois todos os *activos* da empresa se encontram em mãos alheias - por exemplo, na posse de "bondholders".

Caso se verifique,  $V > A$ , então, no instante  $T^*$  a situação líquida da empresa será igual a  $V - A$ .

Dito isto, parece claro que os Capitais Próprios de uma qualquer empresa podem ser entendidos como uma Opção Call Europeia sobre o valor  $V$  da mesma, com maturidade no instante  $T^*$ , e preço de exercício igual a  $A$  (dívida a terceiros).

Por extensão, uma Opção Call sobre Acções de uma qualquer empresa com capitais alheios, com data de vencimento anterior ao instante  $T^*$ , pode bem ser entendida como uma Opção Call sobre uma segunda Opção Call incidente sobre o valor  $V$  da empresa. Isto é, uma Opção sobre uma Opção ou uma Opção Call composta.

Fica assim justificada a designação do modelo, o qual é atribuído a Geske<sup>(101)</sup>.

(101) GESKE, R., "The valuation of compound options" in *Journal of Financial Economics*, 7 (1979), pp. 63 a 81.

À luz desta interpretação, a variável de estado associada ao valor da Opção sobre uma Acção de uma empresa, deixa de ser  $S$ , o preço da Acção, passando a ser  $V$ , o valor da própria empresa.

Geske assumiu que a volatilidade de  $V$ ,  $\sigma_V$ , bem como o montante da dívida,  $A$ , são constantes.

O modelo propõe uma fórmula aproximada à de Black-Scholes para a determinação de  $S$  em função de  $V$ . Ou seja,

$$S = V\Phi(d_1) - Ae^{-r(T^*-t)}\Phi(d_2)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(V/A) + (r + \sigma_V^2/2)(T^* - t)}{\sigma_V \sqrt{T^* - t}};$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T^* - t}.$$

O processo de avaliação de uma Opção Call Europeia - sobre uma Acção que não prevê o pagamento de dividendos - utilizando o Modelo Composto envolve, comparativamente à Fórmula de Black-Scholes, uma maior complexidade computacional. Mais, obriga ao conhecimento do valor exacto do montante em dívida,  $A$ , bem como da data da sua expiração,  $T^*$ .

A sua expressão é a seguinte:

$$c = V\Psi\left(a_1, b_1; \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right) - Ae^{-r\tau_2}\Psi\left(a_2, b_2; \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right) - Xe^{-r\tau_2}\Phi(a_2)$$

onde

$$a_1 = \frac{\ln(V/V^*) + (r + \sigma_V^2/2)\tau_1}{\sigma_V \sqrt{\tau_1}}$$

$$b_1 = \frac{\ln(V/A) + (r + \sigma_V^2/2)\tau_2}{\sigma_V \sqrt{\tau_2}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma_V \sqrt{\tau_1}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma_V \sqrt{\tau_2}$$

$$\tau_1 = T - t$$

$$\tau_2 = T^* - t.$$

sendo  $\Psi(a, b; \rho)$  a função de probabilidade acumulada de uma função de distribuição Normal Bivariada Standard, e  $V^*$  o valor de  $V$  em  $T$ .

As volatilidades de  $V$ ,  $\sigma_V$ , e de  $S$ ,  $\sigma$  estão, prova-se, negativamente correlacionadas.

Com efeito, quando  $V$  diminui, o capital alheio<sup>(102)</sup> aumenta, o mesmo acontecendo, necessariamente, com a volatilidade de  $S$ . Quando, por outro lado,  $V$  aumenta, o capital alheio diminui e, com ele, a volatilidade de  $S$ .

A existência de uma tal correlação identifica possíveis ocorrências de desvios do tipo dos da Figura 5.1-b). Dito de outra forma, o Modelo da Opção Composta, por comparação ao modelo de Black-Scholes, tenderá a sobreavaliar Opções Call *out-of-the-money* e Put *in-the-money*, e a subavaliar Opções Call *in-the-money* e Put *out-of-the-money*.

## 4.2. DISPLACED DIFFUSION MODEL

Rubinstein<sup>(103)</sup> propôs o modelo que ficou conhecido por *Displaced Diffusion Model* para a avaliação de Opções sobre Acções.

Segundo este modelo existem numa empresa duas categorias de "activos". A saber: os "activos" que envolvem risco, mas com volatilidade suposta constante; e os "activos" de risco-zero, os quais proporcionam um retorno, ou ganho, igual áquele que poderia ser obtido beneficiando de uma taxa de risco-zero,  $r$ .

Na modelização proposta, Rubinstein utiliza-se de um parâmetro "chave", que designou por  $a$  e definiu do seguinte modo:

$$a = \alpha(1 + \beta)$$

representando  $\alpha$  a proporção inicial dos "activos" totais da empresa que envolvem risco, e  $\beta$  o valor de partida do rácio "dívida-capitais próprios" (isto é, "initial debt-to-equity ratio").

Assim, se  $a > 1$ , então o montante da dívida a considerar no *Displaced Diffusion Model* supera os "activos" sem risco.

(102) Isto é: a utilização de capitais de empréstimo em reforço do capital próprio.

(103) RUBINSTEIN, M., "Displaced Diffusion Option Pricing" in *Journal of Finance*, 38, March 1983, pp. 213 a 217.

Deduzindo o valor dos "activos" sem risco ao valor da dívida, o modelo em estudo aproxima-se do *compound option model*, conduzindo a desvios no valor observado da Opção do tipo dos da Figura 5.1-b).

Se  $a < 1$ , então é porque o montante da dívida não excede o valor dos "activos" sem risco.

Neste caso, o modelo revela propriedades distintas do modelo anterior. Deduzindo o valor da dívida ao valor dos "activos" sem risco, poderemos escrever:

$$S = S_A + S_B$$

onde  $S$  representa o preço da Acção;  $S_A$  simboliza o valor dos "activos" envolvendo risco; e  $S_B$  o valor líquido dos "activos" sem risco.

Quando  $S_A$  aumenta rapidamente,  $S$  e a correspondente volatilidade aumentam também. Tal deve-se ao facto de os "activos" que envolvem risco representarem uma percentagem significativa de  $S$ . De modo análogo, quando  $S_A$  diminui, rapidamente, quer  $S$ , quer  $\sigma$ , diminuam também.

Daqui decorre que o preço da Acção e a respectiva volatilidade estão positivamente correlacionadas. A Figura 1 - c) é, assim, a que melhor identifica os possíveis *enviesamentos*.

A fórmula para avaliação de uma Opção Call Europeia a partir do "displaced diffusion model" é, finalmente, dada da seguinte forma:

$$c = aS\Phi(d_1) - (X - bS)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

onde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln[aS/(X - bS)] + (r - \sigma_R^2/2)(T-t)}{\sigma_R\sqrt{T-t}}; \\ d_2 &= d_1 - \sigma_R\sqrt{T-t}; \\ a &= \alpha(1 + \beta); \\ b &= (1 - a)e^{r(T-t)}, \end{aligned}$$

sendo  $\sigma_R$  a volatilidade dos "activos" com risco.

Caso se admita o pagamentos de dividendos *certos*, o seu valor "composto" à taxa de risco-zero, no instante  $T$ , deve ser subtraído ao valor de  $b$ .

Como nota final, deve recordar-se que já aquando da avaliação de Opções que, supostamente, prevêem o pagamento de dividendos previamente fixados, se assumiu ser o preço de uma Acção o resultado de duas componentes: uma que não acarretava risco, ou de risco-zero, utilizada para o pagamento de dividendos; e outra envolvendo risco mas de volatilidade constante. O modelo a que então se fez referência pode, pois, ser considerado um caso particular do *displaced diffusion model*, tomando para o valor da dívida o valor zero.

### 4.3. CONSTANTE DA ELASTICIDADE DA VARIÂNCIA

O modelo da Variância com Elasticidade Constante ("Constant Elasticity of Variance Model") foi proposto por Cox e Ross<sup>(104)</sup>.

Segundo este modelo, o preço de uma qualquer Acção possui uma volatilidade do tipo

$$\sigma S^{-\alpha},$$

para algum  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Assim sendo, a evolução no tempo do preço de uma Acção seria dado da seguinte forma:

$$dS = \mu S dt + \sigma S^{-\alpha} dz.$$

A volatilidade do preço de uma Acção está, desta forma, negativamente relacionada com o preço da mesma. Ou seja, uma aumenta com a diminuição da outra. E a uma correlação negativa deste tipo correspondem *enviesamentos* como os da Figura 5.1-b).

O princípio teórico em que se baseia o modelo em apreço é o de que todas as empresas possuem custos fixos. Custos fixos esses, que devem sempre ser considerados, independentemente das *performances* das próprias empresas.

Assim, quando o preço de uma Acção diminui, pode presumir-se que a *performance* da empresa terá também decrescido, pelo que a existência dos referidos custos fixos terá o efeito de aumentar a volatilidade. Quando o preço das Acções aumenta, ocorre o oposto,

(104) COX, J. C., ROSS S. A. "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes" in *Journal of Economics*, 3 (March 1976), pp. 145 a 166.

sendo que, neste caso, a existência daqueles custos reflecte-se, justamente, na diminuição da volatilidade.

As fórmulas de avaliação de Opções segundo o modelo referido são bastante complexas pelo que as omitiremos.

Porém, quando se considera  $\alpha = 1$ , caso em que a volatilidade e o preço da Acção são inversamente proporcionais, obtém-se um modelo particular que é conhecido por *Absolute Diffusion Model*.

A fórmula de avaliação de uma Opção Europeia através desta última via é dada da seguinte forma:

$$c = (S - Xe^{-r(T-t)})\Phi(y_1) - (S - Xe^{-r(T-t)})\Phi(y_2) - v[n(y_1) - n(y_2)]$$

onde

$$\begin{aligned} v &= \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2r(T-t)}}{2r}}; \\ y_1 &= \frac{S - Xe^{-r(T-t)}}{v}; \\ y_2 &= \frac{-S - Xe^{-r(T-t)}}{v}; \\ n(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}. \end{aligned}$$

Sendo fácil de implementar, este último modelo evidencia uma forte debilidade que consiste em admitir a negatividade do preço das Acções.

#### 4.4. THE PURE JUMP MODEL

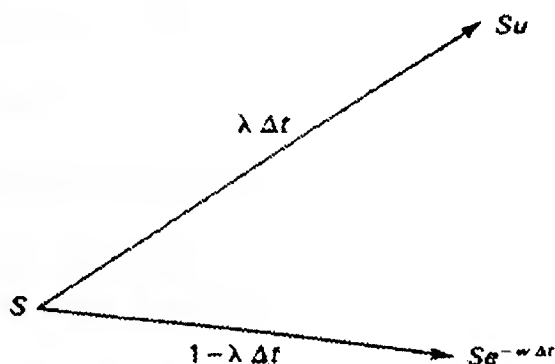
Os modelos precedentes consideram a variação contínua dos preços das Acções.

Com o modelo que se segue, retoma-se uma ideia que já foi, em parte, objecto de análise [Vd. Cap II, Modelo Binomial] e que considera a hipótese de os preços das Acções evoluírem seguindo processos "discretos" que envolvem "saltos" de valores (*jump process*).

Este modelo foi inicialmente sugerido por Cox e Ross<sup>(105)</sup>. Só mais tarde, partilhando a responsabilidade da escrita com Rubinstein<sup>(106)</sup>, lhe deram letra de forma. Ilustramo-lo na Figura 5.2.

A ideia que pretende transmitir é a de que, por cada intervalo de tempo considerado,  $\Delta t$ , infinitamente pequeno, coexistem duas possibilidades distintas de evolução do preço da Acção. Assim, considera-se que o preço da Acção possui a probabilidade  $\lambda \Delta t$  de evoluir, no referido lapso de tempo, do valor  $S$  para o valor  $uS$ , sendo, por outro lado,  $1 - \lambda \Delta t$  a probabilidade de que a referida evolução ocorra do valor  $S$  para o valor  $Se^{-w \Delta t}$ .

Dito de outra forma, o preço das Acções, na maior parte das vezes, decresce a uma taxa  $w$ , exibindo, contudo, ocasionalmente, saltos de valor de grandeza igual a  $u - 1$  vezes o seu valor corrente.



**Figura 5.2** Variação do preço de uma Acção segundo o "Pure Jump Model"

No limite, isto é, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , os saltos ocorrem de acordo com uma lei de probabilidade com distribuição de Poisson de média igual a  $\lambda$ . Assim, considera-se que a distribuição final do preço de uma Acção segue uma log-Poisson, sendo o correspondente valor de uma Opção Call dado pela expressão que se segue:

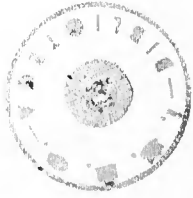
$$c = S\Psi(x; y) - Xe^{-r(T-t)}\Psi(x; y/u)$$

onde

$$\Psi(\alpha; \beta) = \sum_{i=\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\beta} \beta^i}{i!};$$

<sup>(105)</sup> COX, J. C., ROSS, S. A., "The Pricing of Options for Jump Processes" Working paper no. 2-75, Rodney L. White Center for Financial Research, University of Pennsylvania, April 1975, cit. por HULL, J., "Options, Futures and Other Derivative Securities", 2<sup>nd</sup>. Ed., p. 442.

<sup>(106)</sup> COX, J. C., ROSS, S. A., RUBINSTEIN, M. "Options Pricing: A Simplified Approach" in Journal of Financial Economics, 7 (September 1979), pp. 229 a 263.



$$y = \frac{(r+w)(T-t)u}{u-1};$$

e  $x$  é o menor inteiro positivo superior a  $\frac{\ln(X/S) + w(T-t)}{\ln(u)}$ .

O modelo revela-se, contudo, irrealista por só admitir a existência de "saltos" positivos.

#### 4.5. THE JUMP DIFFUSION MODEL

Merton<sup>(107)</sup> sugeriu um modelo misto para a evolução aleatória do preço de uma Acção, conjugando variação contínua (Movimento Browniano Geométrico) e variação discreta (saltos).

Para tal definiu:

$\mu$  - rendibilidade ou ganho esperado da Acção;

$\lambda$  - frequência com que os "saltos" (ou variações discretas) ocorrem no valor do preço;

$k$  - amplitude média dos saltos observados no preço da Acção, estimada em função da variação percentual reflectida no preço da mesma.

Merton assumiu que a distribuição de probabilidade da amplitude do "salto" - entendida como a variação percentual observada no preço da Acção - deve também ser tida em conta no processo considerado. Ora, sendo a taxa de crescimento médio resultante dos "saltos" dada por  $\lambda k$ , então a taxa de crescimento esperado dada pelo Movimento Browniano será igual<sup>(108)</sup> a  $\mu - \lambda k$ .

Merton considera que a componente da rentabilidade da Acção que é devida às variações por "saltos" apresenta um risco "não-sistemático", isto é, no sentido de "risk not priced in economy".

<sup>(107)</sup> MERTON, R. C., "Option Pricing When Underlying Stock Returns are discontinuous" in *Journal of Financial Economics*, 3 ( March 1976), pp.125 a 144.

<sup>(108)</sup> Ou seja, um processo estocástico do tipo  $\frac{dS}{S} = (\mu - \lambda k)dt + \sigma dz + dq$ , onde  $dz$  e  $dq$  representam, respectivamente, um processo de Wiener e um processo de Poisson gerador dos "saltos", sendo  $\sigma$  a volatilidade do movimento Browniano geométrico.



A assunção deste pressuposto revela-se fundamental, pois, assim sendo, é possível considerar um *Portfolio* do mesmo tipo do de Black-Scholes, que elimina o factor de incerteza intrínseco ao Movimento Browniano e, logo, capaz de produzir um ganho equivalente áquele que se obteria beneficiando de uma taxa de risco-zero.

Tal circunstância conduz-nos à fórmula de avaliação de Opções Call Europeias que se segue.

Apresenta-se a sua versão mais simples supondo que a amplitude do "salto" segue uma distribuição de probabilidade *lognormal* com desvio-padrão igual a  $\delta$ .

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_1 \tau} (\lambda_1 \tau)^n}{n!} f_n$$

sendo  $\tau = T - t$  e  $\lambda_1 = \lambda(1+k)$ .

A variável  $f_n$  representa o valor de Black-Scholes da Opção em causa quando se toma para valor da variância instantânea o valor  $\sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau}$ , e para taxa de risco-zero  $r - \lambda k + \frac{n\gamma}{\tau}$ , sendo  $\gamma = \ln(1+k)$ .

## 5. CONCLUSÕES

Evidenciámos neste Capítulo a relativa debilidade da Fórmula de Black-Scholes. Através da comparação com o Modelo da Volatilidade Estocástica identificámos os *enviesamentos* a que aquela dá origem.

Percebemos como o modelo Browniano Geométrico adoptado para a interpretação da evolução no tempo do preço de uma Acção é falível. Não poderia, de resto, ser de outro modo, porquanto as premissas que estiveram na base da sua formulação mais não são do que a síntese matemática de um conjunto de interacções económicas complexas.

Apresentámos, por isso, modelos alternativos de avaliação de Opções sobre Acções.

Visámos com a sua análise enumerar um conjunto de métodos alternativos de avaliação de Opções que fosse susceptível de abarcar a

enorme variedade de comportamentos possíveis de ocorrer no decurso da evolução no tempo do preço de uma Acção.

Acontece que a complexidade computacional destes modelos desaconselha a sua utilização.

No próximo Capítulo serão apresentados alguns dos Métodos Numéricos mais utilizados na avaliação de Opções.

## CAPÍTULO VI

### MÉTODOS NUMÉRICOS

#### 1. INTRODUÇÃO

A existência de soluções analíticas que satisfaçam as Equações Diferenciais deduzidas nos capítulos anteriores [vd. Capítulo III, IV e V] só ocorre em contextos muito particulares. As fórmulas de Black-Scholes e da Volatilidade Estocástica para a avaliação de Opções Europeias sobre Acções constituem, pode mesmo dizer-se, um exemplo raro.

A avaliação de Opções depende, assim, e numa grande percentagem de casos, da aplicação de Técnicas ou Métodos Numéricos.

Com efeito, bastaria pensarmos na complexidade computacional tanto das equações diferenciais como dos processos estocásticos relativos à evolução no tempo das variáveis de estado associadas, para que se admitam os Métodos Numéricos como alternativas interessantes na procura de soluções aproximadas, ou estimativas das soluções exactas, com esforços computacionais substancialmente reduzidos.

Mas, se é certo que as soluções analíticas - quando se torna possível determiná-las - se confinam a um quadro limitado de aplicação, já o seu conhecimento se revela fundamental enquanto factor de referência, ou de comparação, na avaliação dos referidos Métodos Numéricos.

São de duas *categorias* os Métodos Numéricos mais utilizados. A primeira pressupõe a *simulação* da evolução no tempo da *variável de*

estado em análise. Esta pode ser feita através de Árvores, ou, em alternativa, pela utilização do Método de Monte Carlo. A segunda obriga à *discretização* da Equação Diferencial em Diferenças Finitas.

A generalidade dos Métodos Numéricos permite avaliar toda a tipologia de Produtos Derivados dependentes de uma ou mais variáveis de estado. Apresentaremos Métodos Numéricos elementares, exemplificando a sua aplicação ao caso de uma *variável de estado*.

A sua generalização para o caso de haver duas ou mais variáveis de estado não faz parte do objectivo deste trabalho.

## 2. TÉCNICAS DE SIMULAÇÃO

### 2.1. UTILIZAÇÃO DE ÁRVORES

A utilização de Árvores na avaliação de Produtos Derivados, e em particular de Opções, obriga à discretização quer do tempo, quer da *variável de estado*, no caso, o preço da Acção associada à Opção,  $S$ .

Serão utilizados dois tipos e outros tantos subtipos de Árvores. A saber, respectivamente, Árvores Binomiais e Árvores Trinomiais, Geométricas ou Aritméticas.

#### 2.1.1. ÁRVORES BINOMIAIS

As Árvores Binomiais foram sugeridas por Cox, Ross e Rubinstein<sup>(109)</sup>. O essencial desta técnica foi já descrito com pormenor no Capítulo II.

Numa Árvore Binomial, recordemos, assume-se que a *variável de estado* varia no tempo segundo um processo discreto - *jump process* -, coexistindo, em cada instante, duas possibilidades alternativas e complementares de evolução: uma, relativa a um cenário de subida; a outra correspondente a um cenário de descida<sup>(110)</sup>.

(109) COX, J.C., ROSS, S. e RUBINSTEIN, "Option Pricing: a simplified Approach" in Journal of Financial Economics, 7 (Oct. 1979), pp. 229-264.

(110) "The basic idea is to replace the continuous distribution of stock prices by two-point discrete distribution over successively smaller time intervals.", BOYLE P.P., "A lattice framework for Option pricing with two state variable", BOYLE, P.P. Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 23, n.1, March 1988, pp. 1-12, in p.2.

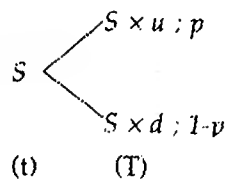
No que se segue, recapitularemos o que de fundamental já se disse a propósito da referida técnica, acrescentaremos o que então não foi oportuno dizer, e apresentaremos a título complementar algumas variações possíveis da mesma.

### 2.1.1.1. Árvores Binomiais Geométricas

As Árvores Binomiais Geométricas são caracterizadas por apresentarem uma discretização da *variável de estado* em progressão geométrica.

Este tipo de árvores são indicadas para simulação, entre outros, de Movimentos Brownianos Geométricos.

Considerando-se a variação de  $S$  em *progressão geométrica*, obtém-se a evolução temporal entre dois instantes de tempo sucessivos  $t$  e  $T$ , representada na Figura 6.1:



**Figura 6.1** Árvore Binomial de Simulação da evolução do preço da Acção.

Os parâmetros  $u$  e  $d$  representam, respectivamente, os factores de subida e de descida, sendo  $p$  a probabilidade de ocorrência de um aumento no valor da *variável de estado*.

Cox, Ross e Rubinstein definiram  $u$  e  $d$  do seguinte modo:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (6.1)$$

$$u \times d = 1. \quad (6.2)$$

O valor de  $p$  é determinado a partir da condição de igualdade do *valor esperado* das distribuições discreta e contínua, obtendo-se:

$$p = \frac{a - d}{u - d} \quad (6.3)$$

onde  $a = e^{r\Delta t}$ .  $a$  representa o *valor esperado* da *variável de estado* numa economia neutra ao risco, sendo  $r$  a taxa de juro instantânea de risco-zero.

A avaliação da Opção começa com a determinação do seu valor na maturidade. Uma vez calculados, os referidos valores são descontados para instantes imediatamente anteriores, utilizando-se, para o efeito, a taxa de juro de risco-zero e a probabilidade de ocorrência de cada um dos valores.

O processo pode ser ilustrado considerando o caso de uma Opção Call Europeia, sobre uma Acção de preço  $S$ , com preço de exercício  $X$  e uma discretização temporal em um período.

No caso, o valor da Call é definido pela expressão:

$$c = \frac{1}{a} [pc_u + (1-p)c_d] \quad (6.4)$$

sendo:

$$c_u = \max[0, uS - X] \quad (6.4a)$$

$$c_d = \max[0, dS - X]. \quad (6.4b)$$

O valor obtido para a Opção é tanto mais preciso quanto mais *fin*a ou *estreita* for a discretização temporal considerada de  $n$  intervalos de tempo.

Genericamente, o valor de uma Opção Call pode ser obtido a partir da expressão:

$$c = \frac{1}{a^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \max[0, u^i d^{n-i} S - X]. \quad (6.5)$$

Utilizando (6.1), (6.2) e (6.3) é possível demonstrar que no limite, isto é, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , a variância da distribuição discreta tende para a variância da distribuição contínua. Este facto e a condição de determinação da probabilidade de  $p$  - igualdade no *valor esperado* de ambas as distribuições -, indiciam que a solução discreta assim obtida convergirá para a solução contínua.

Com efeito, Cox e Rubinstein concluíram - como foi demonstrado no Capítulo III - que a solução obtida por aplicação do Modelo Binomial se aproxima da solução de Black-Scholes, provando que a expressão (6.5), quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , tende para a Fórmula de Black-Scholes.

Os coeficientes  $u$ ,  $d$  e  $p$  podem ainda, conforme foi afirmado no Capítulo II, ser calculados a partir da resolução de um sistema de equações construído com base na condição de igualdade simultânea do *valor esperado* e da *variância* das distribuições discreta e contínua.

Ou seja, considerando-se que,

$$\begin{cases} E_d[S_T/S_t] = a \\ Var_d[S_T/S_t] = b^2 \end{cases} \quad (6.6)$$

em que  $a$  e  $b^2$  representam, respectivamente, o *valor esperado* e a *variância* da distribuição contínua numa economia neutra ao risco, e  $E_d[S_T/S_t]$  e  $Var_d[S_T/S_t]$  os correspondentes *valor esperado* e *variância* da distribuição discreta.

Concretizando,

$$a = e^{r\Delta t} \quad (6.6a)$$

$$b^2 = a^2(e^{\sigma^2\Delta t} - 1) \quad (6.6b)$$

$$E_d[S_T/S_t] = \sum_i p_i (S_T/S_t)_i \quad (6.6c)$$

$$Var_d[S_T/S_t] = \sum_i p_i [(S_T/S_t)_i - E_d[S_T/S_t]]^2 \quad (6.6d)$$

sendo  $p_i$  a probabilidade de ocorrência do estado  $i$ .

Considerando  $u \times d = 1$ , o sistema de equações (6.6) permite obter:

$$u = \frac{(a^2 + b^2 + 1) + \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)^2 - 4a^2}}{2a} \quad (6.7)$$

$$p = \frac{a - d}{u - d}. \quad (6.8)$$

Esta última metodologia, que é devida, recorde-se, a Hull e a White<sup>(111)</sup>, possui a vantagem de conduzir, qualquer que seja a circunstância, a valores positivos para as probabilidades, dado que se verifica sempre a condição  $u > a$ . Já no Modelo de Cox, Ross e Rubinstein, a condição  $p < 1$  obriga à restrição  $\Delta t < (\sigma/r)^2$ .

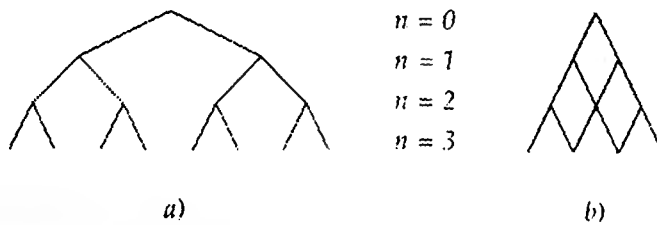
Aquando da construção da Árvore de valores da *variável de estado* deve assegurar-se que esta, após duas evoluções sucessivas e opostas, qualquer que seja a ordem considerada, tende sempre para o mesmo valor.

<sup>(111)</sup> HULL, J.C. e WHITE, A., "The use of Control Variate Technique in Option Pricing" in Journal of Financial and Quantitative Analysis, 23 (September, 1988), pp. 237 a 251.

Afirma-se, nessa circunstância, que a Árvore converge.

Caso não se observe esta condição, em vez dos normais  $(n+1)(n+2)/2$  valores da *variável de estado*, será necessário considerar, para uma distribuição temporal de  $n$  intervalos de tempo,  $2^{n+1} - 1$  valores da mesma.

A Figura 6.2 ilustra esta conclusão, para uma discretização de três intervalos de tempo.



**Figura 6.2** Árvore de Simulação dos valores da variável de estado:  
a) Árvore divergente; b). Árvore convergente

As situações de *não convergência* ou de *divergência* ocorrem, quase sempre, em resultado de descontinuidades observadas no valor das variáveis de estado num determinado instante de tempo. É o que acontece, por exemplo, quando se admite o pagamento de *dividendos*.

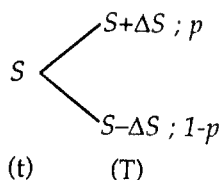
Embora a utilização de árvores geométricas permita ultrapassar o problema, a utilização de árvores aritméticas é, neste caso, vantajosa, porque a convergência não é afectada pela descontinuidade. Contudo, a simulação de Movimentos Brownianos Geométricos numa Árvore Binomial não admite, como veremos, uma discretização aritmética.

### 2.1.1.2. Árvores Binomiais Aritméticas

As Árvores Binomiais Aritméticas apresentam uma discretização em progressão aritmética. Estas últimas são mais versáteis do que as anteriores por revelarem características que permitem acomodar uma maior diversidade de processos de variáveis de estado.

A Figura 6.3 mostra a evolução temporal da *variável de estado* na hipótese de uma discretização Binomial em progressão aritmética.





**Figura 6.3** Evolução binomial aritmética do preço de uma acção.

Os parâmetros da distribuição discreta  $\Delta S$  e  $p$  são determinados a partir do sistema de equações:

$$\begin{cases} E_d[S_T] = S_t a \\ Var_d[S_T] = S_t^2 b^2 \end{cases} \quad (6.9)$$

A resolução do sistema de equações (9) conduz às expressões:

$$p = \frac{1}{2} + \frac{(a-1)S}{2\Delta S} \quad (6.9a)$$

$$\Delta S = S \sqrt{(a-1)^2 + b^2} \quad (6.9b)$$

O resultado (6.9b) permite concluir que a condição de convergência da árvore obriga, neste caso, a uma discretização geométrica.

Com efeito, definindo  $u$  e  $d$  a partir das expressões:

$$\begin{cases} u = 1 + e \\ d = 1 - e \end{cases} \quad (6.10)$$

onde

$$e = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} \quad (6.10a)$$

obtém-se

$$\begin{cases} S + \Delta S = uS \\ S - \Delta S = dS \end{cases} \quad (6.10b)$$

A expressão de cálculo da probabilidade  $p$  simplifica-se, obtendo-se:

$$p = \frac{a-d}{u-d} \quad (6.10c)$$

Esta alternativa de definição dos coeficientes  $u$  e  $d$  conduz, incondicionalmente, a valores aceitáveis das probabilidades, verificando-se, para  $a > 1$ , a relação:  $1/2 < p < 1$ .

### 2.1.2. ÁRVORES TRINOMIAIS

As Árvores Trinomiais são uma extensão das Árvores Binomiais, tendo surgido como uma tentativa para obviar a algumas das suas limitações.

Existem dois tipos de Árvores Trinomiais: as de discretização Geométrica e as de discretização Aritmética.

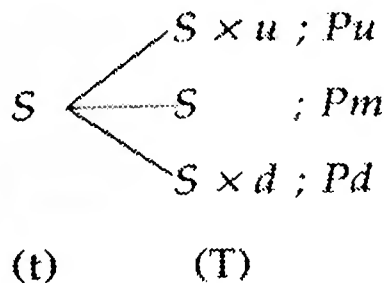
O aparecimento das Árvores Trinomiais Geométricas deu-se no âmbito da simulação de Movimentos Brownianos Geométricos.

A simulação de processos mais complexos, como o Processo Estocástico de Ito - relativo, por exemplo, à evolução das Taxas de Juro -, está condicionada à utilização de Árvores Trinomiais Aritméticas que apresentam, neste caso, maior versatilidade.

#### 2.1.2.1. Árvores Trinomiais Geométricas

Boyle<sup>(112)</sup>, baseando-se no Modelo Binomial de Cox, Ross e Rubinstein, apresentou um Modelo Trinomial Geométrico em que não exclui a possibilidade da *variável de estado* manter o seu estado inicial.

A Figura 6.4 mostra a Árvore Trinomial de simulação da evolução temporal Geométrica da variável estado.



**Figura 6.4** Evolução Trinomial Geométrica do preço de uma Acção.

<sup>(112)</sup> Autor e ob. cit. nota (110).

As probabilidades  $p_u$ ,  $p_m$  e  $p_d$ , são determinadas a partir do sistema de equações<sup>(113)</sup>:

$$\begin{cases} E_d[S_T/S_t] = a \\ Var_d[S_T/S_t] = b^2 \\ p_u + p_m + p_d = 1 \end{cases} \quad (6.11)$$

em que  $a$  e  $b^2$  representam, aqui, de novo, respectivamente, o *valor esperado* e a *variância* da distribuição contínua.

A resolução do sistema de equações conduz às expressões:

$$p_u = \frac{(b^2 + a^2 - a)u - (a - 1)}{(u - 1)(u^2 - 1)} \quad (6.11a)$$

$$p_d = \frac{(b^2 + a^2 - a)u^2 - (a - 1)u^3}{(u - 1)(u^2 - 1)} \quad (6.11b)$$

$$p_m = 1 - (p_u + p_d) \quad (6.11c)$$

Os factores  $u$  e  $d$  são determinados a partir das expressões:

$$u = e^{\lambda \sigma \sqrt{\Delta t}} \quad (6.12)$$

$$u \times d = 1, \quad (6.13)$$

sendo  $\lambda$  uma constante a determinar por forma a excluir a possibilidade de ocorrência de probabilidades negativas.

O valor mais adequado de  $\lambda$  é o que permite obter valores para as probabilidades sem grandes discrepâncias entre si<sup>(114)</sup>.

Por fim, e no caso particular de uma Opção Call Europeia, o seu valor é determinado, a partir de uma distribuição Multinomial, do seguinte modo:

<sup>(113)</sup> Isto é, o *valor esperado* e a *variância* das distribuições discreta e contínua igualam-se e a soma das probabilidades totaliza a unidade.

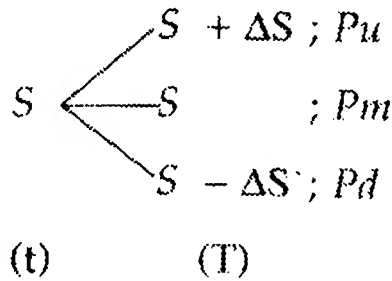
<sup>(114)</sup> "In order to determine the most effective value of  $\lambda$  to use, a number of options were evaluated over a range of parameter values. Best results were obtained when the probabilities were roughly equal", Autor e ob. cit nota (110) p.5.

$$c = \frac{1}{\alpha^n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} p_u^j p_d^{i-j} p_m^{n-i} \max[0, u^j d^{i-j} m^{n-i} S - X].$$

### 2.1.2.2. Árvores Trinomiais Aritméticas

No Modelo trinomial com uma discretização em *progressão aritmética*, considera-se que a *variável de estado*, em cada instante de tempo  $t$ , tem três possibilidades de evolução temporal para um conjunto de valores uniformemente distribuídos.

A Figura 6.5 mostra o processo de evolução temporal da *variável de estado*.



**Figura 6.5** Evolução Trinomial Aritmética do preço de uma Ação.

No Método Trinomial Aritmético as probabilidades  $p_u$ ,  $p_m$  e  $p_d$  são determinadas a partir da resolução de um sistema de equações, equivalente ao sistema (6.11), considerando a evolução temporal da *variável de estado* representada na Figura 6.5.

No caso particular de um Movimento Browniano Geométrico, a solução do referido sistema de equações conduz às expressões:

$$p_u = \frac{S^2 b^2}{2\Delta S^2} + \frac{S^2(a-1)^2}{2\Delta S^2} + \frac{S(a-1)}{2\Delta S^2} \quad (6.14)$$

$$p_d = \frac{S^2 b^2}{2\Delta S^2} + \frac{S^2(a-1)^2}{2\Delta S^2} - \frac{S(a-1)}{2\Delta S^2} \quad (6.15)$$

$$p_m = 1 - \frac{S^2 b^2}{2\Delta S^2} - \frac{S^2(a-1)^2}{2\Delta S^2}. \quad (6.16)$$

As probabilidades são, neste caso, função (do valor) da própria *variável de estado*.

Ou seja, quando a *variável de estado* segue um Movimento Browniano Geométrico, a aplicação de Árvores Trinomiais Aritméticas não é a mais vantajosa por poder conduzir a valores negativos<sup>(115)</sup>.

Uma tal desvantagem pode, no entanto, ser superada procedendo à seguinte transformação de variáveis  $\Theta = \ln(S)$ .

Recordemos que o processo da variável,  $\Theta$ , resultante da referida transformação é dado pela equação [Vd. Cap III]:

$$d\Theta = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dZ. \quad (6.17)$$

Assim, as probabilidades associadas aos três estados possíveis da evolução temporal da *variável de estado*  $\theta$ , são obtidas a partir do sistema de equações:

$$\begin{cases} E_d[\Theta_T] = \Theta_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t \\ \text{Var}_d[\Theta_T] = \sigma^2 \Delta t \\ p_u + p_m + p_d = 1 \end{cases} \quad (6.18)$$

A resolução do sistema de equações anterior conduz às seguintes probabilidades:

$$p_u = \frac{\sigma^2 \Delta t}{2\Delta\Theta^2} + \frac{\eta^2}{2\Delta\Theta^2} + \frac{\eta}{2\Delta\Theta^2} \quad (6.18a)$$

$$p_d = \frac{\sigma^2 \Delta t}{2\Delta\Theta^2} + \frac{\eta^2}{2\Delta\Theta^2} - \frac{\eta}{2\Delta\Theta^2} \quad (6.18b)$$

$$p_m = 1 - \frac{\sigma^2 \Delta t^2}{\Delta\Theta^2} + \frac{\eta^2}{\Delta\Theta^2} \quad (6.18c)$$

sendo

$$\eta = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t. \quad (6.18d)$$

A determinação dos valores de  $\Delta\theta$  e  $\Delta t$  está dependente da eventualidade de ocorrerem probabilidades negativas.

<sup>(115)</sup> Hull e White propuseram a modificação do processo de evolução da *variável de estado* quando, na sequência do cálculo, se obtém uma probabilidade negativa, in HULL, J.C. and WHITE, A., "Valuing Derivative Securities using the Explicit Finite Difference Method", Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 25, no.1, March 1990, pp. 87-100.

As probabilidades deverão, por sua vez, ser calculadas a partir dos parâmetros de discretização, de modo a obter valores sem grandes discrepâncias entre si.

De uma forma geral, verifica-se que um bom compromisso entre aquelas duas condições é obtido impondo que:

$$\frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta \Theta^2} = \frac{1}{3} \quad (6.18e)$$

Se se considerar o valor de  $\Delta t$  dado, obtém-se:

$$\Delta \Theta = \sigma \sqrt{3 \Delta t} . \quad (6.18f)$$

Finalmente, o valor de uma Opção Call Europeia, por exemplo, poderá ser obtido, utilizando uma distribuição Multinomial, da seguinte maneira:

$$c = \frac{1}{a^n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} p_d^j p_m^{i-j} p_u^{n-i} \max[0, (\Theta + (n-i-j)\Delta\Theta) - \ln(X)] .$$

## 2.2. MÉTODO DE MONTE CARLO

O Método de Monte Carlo foi, pela primeira vez, sugerido, enquanto instrumento de avaliação de Produtos Derivados, por Boyle<sup>(116)</sup>. Constitui uma técnica simples e flexível porque possibilita acomodar distintos processos estocásticos.

No que se segue, descreveremos o Método de Monte Carlo e a sua aplicação na avaliação de uma Opção Call Europeia. Apresentaremos ainda duas técnicas melhorativas da eficiência do método: a *Antithetic Variable Technique* e a *Control Variate Technique*.

Apesar do domínio de aplicação do Método de Monte Carlo ser mais alargado, iniciaremos o seu estudo analisando-o quando utilizado na resolução de Integrais Definidos. Falamos, na prática, do Teorema Fundamental da Integração de Monte Carlo.

O referido resultado estabelece que o valor do integral de uma qualquer função pode ser estimado a partir de uma selecção aleatória

<sup>(116)</sup> BOYLE, P.P., "Options: A Monte Carlo Approach", Journal of Financial Economics 4 (1977), pp 323-338.

de um subconjunto de valores, uniformemente distribuídos, pertencentes ao referido domínio de integração.

Assim, e a título de exemplo, considere-se um integral do tipo

$$G = \int_A g(x)f(x)dx$$

onde  $g(x)$  é uma função arbitrária,  $f(x)$  a função densidade de probabilidade da variável aleatória em causa, e  $A$  o respectivo domínio de integração.

Uma estimativa  $\hat{G}$  do valor exacto de  $G$  é obtida tomando uma amostra de  $n$  valores aleatórios,  $x_i$ , obtidos a partir da função densidade  $f(x)$ , e fazendo:

$$\hat{G} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i).$$

O desvio padrão da referida estimativa é dado por  $s'$ , sendo

$$s'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ g(x_i) - \hat{G} \right]^2. \quad (6.19)$$

Em síntese:

$$\int_A g(x)f(x)dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \pm \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ g(x_i) - \hat{G} \right]^2}.$$

A aplicação do Método de Monte Carlo na avaliação de Produtos Derivados será aqui ilustrada considerando, como se disse, o caso de uma Opção Call Europeia sobre uma Acção.

Ora, o valor de uma Opção Call, numa economia neutra ao risco, é definido, recorde-se, pela expressão:

$$c = e^{r(T-t)} \int_X (S_T - X) f(S_T) dS_T \quad (6.20)$$

onde  $X$  representa o preço de exercício,  $T-t$  o tempo de vida da Opção e  $f(S_T)$  a função densidade de probabilidade do preço da Acção, no instante correspondente à maturidade da Opção.

Assim, o valor da Opção Call sobre uma Acção - assumindo que a mesma não paga *dividendos* durante a sua vigência - é obtido a partir da simulação, numa economia neutra ao risco, da evolução temporal do preço da Acção associada à Opção, ou seja, de  $S$ .

Os valores da referida *variável de estado* podem obter-se [vd. Apêndice] aleatoriamente a partir de uma distribuição *lognormal*.

Esta distribuição considera uma evolução temporal do preço da Acção, definida do seguinte modo:

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = (r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma\varepsilon\sqrt{T-t} \quad (6.20a)$$

ou, o que é equivalente,

$$S_T = S_t e^{(r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma\varepsilon\sqrt{T-t}} \quad (6.20b)$$

onde  $\varepsilon$  representa uma variável aleatória com distribuição Normal Standard.

Os valores de  $\varepsilon$  podem, por seu turno, ser obtidos a partir de outros valores aleatórios com origem numa distribuição Uniforme. Hull, por exemplo, sugere a utilização da expressão:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{12} u_i - 6 \quad (6.20c)$$

sendo  $u$  uma variável aleatória de distribuição uniforme entre 0 e 1.

Cada *corrida* ou *passo de simulação* (*simulation run*) do preço da Acção dá origem a um valor terminal da Opção Call.

O valor desejado da Opção Call é determinado a partir dos diversos valores terminais da *variável de estado*. Assim, considera-se como valor exacto da Opção a média actualizada dos valores parciais resultantes de cada um dos *passos de simulação* precedentes.

O número de *passos de simulação* a efectuar depende, naturalmente, do rigor exigido no cálculo.

Demonstra-se que sendo  $M$  o número de *passos de simulação* efectuados, e  $w$  o desvio padrão resultante dos valores entretanto



obtidos para a Opção em cada um daqueles *passos de simulação*, então o erro<sup>(117)</sup> cometido na estimação do valor exacto da Opção é igual a  $w/\sqrt{M}$ .

Assim, e a menos que se proceda a ajustamentos, será sempre necessário efectuar um elevado número de *passos de simulação* até que uma boa aproximação seja garantida<sup>(118)</sup>.

Consideraremos, em seguida, duas técnicas<sup>(119)</sup> que possibilitam uma significativa diminuição no valor do erro sem aumentar  $M$ . Tais técnicas passam, naturalmente, pela redução do valor de  $s$ .

### 2.2.1. *Antithetic Variable Technique*<sup>(120)</sup>

Na primeira das técnicas referidas, conhecida por *antithetic variable technique*, utiliza-se cada um dos *passos de simulação* para a estimação, não de um, mas de dois valores (parciais) de uma mesma Opção.

O primeiro desses valores, seja  $f$ , é calculado usando o procedimento indicado em 2.2., sendo o segundo,  $f'$ , obtido de forma idêntica, considerando-se, no entanto, em vez dos valores amostrais  $\varepsilon$  - utilizados aquando da primeira estimação -, os seus simétricos.

Assim, o valor considerado da Opção, relativo a um particular *passo de simulação*, será igual à média aritmética,  $\bar{f}$ , dos correspondentes valores  $f$  e  $f'$ .

Esta técnica até intuitivamente faz sentido pois, se um dos valores estimados estiver subavaliado, o outro estará de certeza sobreavaliado.

(117) Com efeito, como para valores elevados de  $n$  a substituição em (6.19) de  $n-1$  por  $n$  é

computacionalmente irrelevante, e como  $\frac{G-G}{s/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ , sendo  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - G]^2$ ,

então o erro da estimativa  $\bar{G}$  de  $G$  é igual a  $s/\sqrt{n}$ .

(118) "To reduce the standard deviation by a factor of ten the number of simulation trials has to be increased one hundredfold", Autor e ob. cit. nota 116, p. 326.

(119) "The thrust of these methods is to modify or distort the original problem in such a way as to improve the accuracy of the results obtained by crude Monte Carlo methods", Autor e ob. cit. nota 116, p. 326.

(120) "(...) this technique relies on the introduction of negative correlation between two estimatives.", Autor e ob. cit. nota 116, p. 326., p. 332.

A estimativa final do valor da Opção far-se-á determinando a média de todos os valores  $\bar{f}$  entretanto obtidos.

Se  $w$  designar o desvio padrão dos valores  $\bar{f}$  calculados nos diferentes *passos de simulação*, representando  $M$  o número de vezes que os mesmos foram efectuados, então prova-se que o erro cometido por esta técnica na estimação do exacto valor da Opção é também igual a  $w/\sqrt{M}$ .

### 2.2.2. Control Variate Technique<sup>(121)</sup>

A segunda técnica referida, designada por *control variate technique*, é especialmente usada quando se conhecem dois Produtos Derivados semelhantes, suponhamos, duas Opções A e B, sendo que uma delas, por exemplo B, possui solução analítica conhecida.

Assim, considerando que está em causa a avaliação da Opção A, a técnica sugere que se proceda a duas simulações paralelas, uma para cada Opção, e ambas com base na mesma sequência de valores amostrais da *variável de estado* para instantes  $\Delta t$  homólogos.

A primeira simulação é utilizada para obter uma estimativa  $f_A$  do valor exacto de A; a segunda visa obter uma estimativa  $f_B$  de B.

Por fim, uma melhor estimação do valor exacto da Opção A é conseguida através da aplicação da fórmula

$$f_A = f_A + f_B - f_B,$$

sendo  $f_B$ , naturalmente, a solução analítica exacta conhecida da Opção B.

Esta última técnica tem-se revelado mais eficiente do que a primeira. Porém, apresenta a dificuldade, por vezes incontornável, de obrigar ao conhecimento da *variável de controle* - ou seja, o valor exacto de uma Opção Homóloga -, o que a torna mais difícil de aplicar.

(121) "The basic idea (...) is to replace the problem under consideration by a similar but simpler problem which has an analytic solution. The solution of the simpler problem is used to increase the accuracy of the solution to the more complex problem.", Autor e ob. cit. nota 116, p. 326.

Comparativamente a outras Técnicas Numéricas, o Método de Monte Carlo revela-se tanto mais eficiente quanto mais *variáveis de estado* tiverem que ser consideradas.

Isto porque o tempo computacional necessário à execução da simulação de Monte Carlo cresce de forma aproximadamente linear relativamente ao número de variáveis consideradas, enquanto que o tempo computacional necessário às restantes técnicas aumenta exponencialmente.

O Método de Monte Carlo pode também ser utilizado para avaliar Opções do tipo Americano. Estas Opções podem, como é sabido, ser exercidas em qualquer instante. A aplicação do Método de Monte Carlo na sua avaliação envolve a discretização do tempo e a simulação de um conjunto de valores intermédios para a variável de estado, de modo a testar as possibilidades de exercício antecipado. O método, torna-se, por isso, mais pesado computacionalmente, conduzindo a um aumento significativo do tempo de cálculo .

Neste trabalho, a Simulação de Monte Carlo será aplicada, com particular destaque, na avaliação de uma Opção cujo preço da Acção associada e respectiva volatilidade são consideradas estocásticas.

### 3. MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Brennan e Schwartz<sup>(122)</sup> utilizaram o Método das Diferenças Finitas para resolver a Equação Diferencial de Black-Scholes e mostraram que o Método Explícito das Diferenças Finitas é, na sua *versão logarítmica*, equivalente a um Modelo Trinomial. No Método das Diferenças Finitas os coeficientes  $p_u$ ,  $p_m$  e  $p_d$  são, contudo, obtidos através da discretização da própria Equação Diferencial de Black-Scholes .

Os Métodos de Diferenças Finitas<sup>(123)</sup> propoem a avaliação dos Produtos Derivados através da resolução numérica das equações diferenciais que os mesmos devem satisfazer.

---

(122) "Finite Difference Methods and Jump Processes arising in the pricing of contingent claims: a synthesis", BRENNAN, M.J. e SCHWARTZ, E.S. in *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, September 1978.

(123) Serão aqui referidos o *Método Implícito das Diferenças Finitas* e o *Método Explícito das Diferenças Finitas*.

Mais concretamente, e no que a Opções sobre Acções diz respeito, esta metodologia sustenta que a Equação Diferencial de Black-Scholes

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} = rf \quad (6.21)$$

deva ser reescrita a partir das chamadas *equações diferença*, sendo a expressão que daí resulta, por sua vez, submetida a um processo iterativo.

A aplicação do Método obriga à discretização do tempo e da *variável de estado*, definindo uma *grelha* de valores que possibilitam transformar a Equação Diferencial num conjunto de equações algébricas lineares.

Em cada *nodo* da *grelha* a referida conversão dá-se através da substituição das derivadas parciais por quocientes de *diferenças finitas*.

Sem perda de generalidade, apliquemo-lo na avaliação de uma Opção sobre uma Acção que não prevê pagamento de *dividendos*.

Assim, comecemos por considerar o período de tempo situado entre o momento inicial,  $t = t_0 = 0$ , e o momento final,  $t = T$  - em que, supostamente, ocorre a expiração da Opção -, dividido em  $n$  subintervalos de tempo.

Faça-se  $\Delta t = T/n$ , pelo que se obtém um número finito de subintervalos de tempo de igual amplitude, ou seja,  $n+1$  instantes do tipo

$$0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T.$$

Analogamente, sejam escolhidos, em número finito, e igualmente espaçados,  $m+1$  possíveis preços da Acção associada à Opção.

Designando  $S_{\max}$  o preço máximo da Acção - cujo valor, a ser atingido, faria com que uma Opção Call (Put) valesse virtualmente  $S_{\max}$  (zero) -, considere-se  $\Delta S = S_{\max}/m$ , sendo, então, os  $m+1$  possíveis preços da Acção<sup>(124)</sup> dados por

$$0, \Delta S, 2\Delta S, \dots, S_{\max}.$$

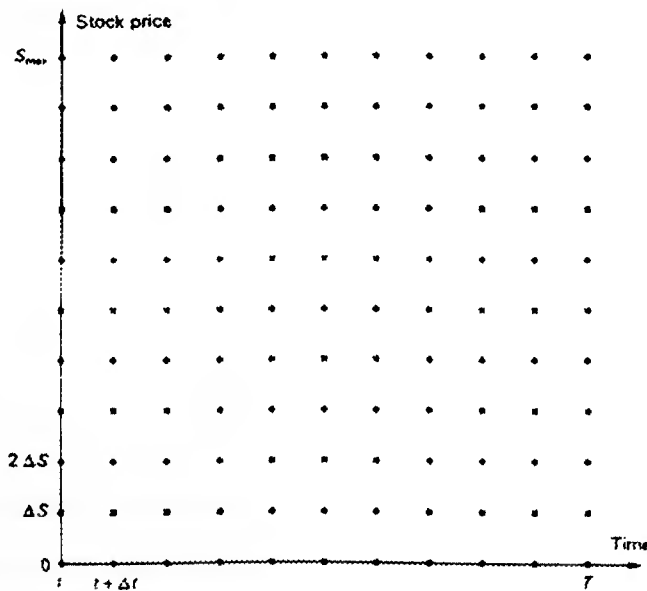
(124) Um de entre estes valores é suposto ser o valor corrente/actual do preço da Acção, pois, existe sempre um  $j$  tal que,  $S = j\Delta S$ .



Uma perspectiva dinâmica do valor das Opções pode ser conseguida, graficamente, utilizando uma *grelha* constituída pelos  $(n+1) \times (m+1)$  *nodos* anteriormente referidos.

O particular *nodo*,  $(i, j)$ , deverá ser interpretado como dizendo respeito ao período de tempo,  $i\Delta t$ , e ao correspondente preço,  $j\Delta S$ , da Acção associada à Opção em análise.

De futuro, utilizaremos a notação,  $f_{i,j}$ , para representar o valor de uma Opção no ponto  $(i, j)$ .



**Figura 6.6** Grelha para uma aproximação do tipo das Diferenças Finitas

### 3.1. MÉTODO IMPLÍCITO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Relativamente a um qualquer *nodo*  $(i, j)$  no interior da *grelha*, a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial S}$  pode, por definição e no limite, ser *aproximada* pela seguinte *diferença dividida*

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S}$$

ou, o que é equivalente, da seguinte maneira

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S}.$$

No caso presente utilizaremos uma *aproximação* mais simétrica, tomando  $\frac{\partial f}{\partial S}$  como a média de ambas, isto é

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S}. \quad (6.22)$$

Já o processo de *conversão* das derivadas parciais de segunda ordem requer a consideração simultânea de, pelo menos, três pontos. Uma *aproximação* de  $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$  no ponto  $(i, j)$  será dada por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cong \frac{\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S}}{\Delta S}$$

ou seja, por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cong \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} \quad (6.23)$$

Em relação à derivada parcial,  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , utilizando uma aproximação idêntica, e tendo por referência os instantes  $i\Delta t$  e  $(i+1)\Delta t$ , obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t}. \quad (6.24)$$

Substituindo as relações (6.22), (6.23) e (6.24) na Equação Diferencial (6.21) e recordando que é sempre possível escrever  $S = j\Delta S$  para algum  $j = 0, 1, \dots, m$ , obter-se-á, então,

$$\frac{1}{2} \sigma^2 (j^2 \Delta S^2) \left( \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} \right) + r(j\Delta S) \left( \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \right) + \left( \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \right) = r f_{i,j}$$

com  $i = 0, 1, \dots, n-1$  e  $j = 1, 2, \dots, m-1$ .

Finalmente, e depois de se proceder ao arranjo dos termos, poderemos escrever

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \quad (6.25)$$

sendo

$$\begin{cases} a_j = \frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \\ b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t \\ c_j = -\frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \end{cases}$$

O estudo fica completo analisando o que ocorre nos *nodos* fronteira para os quais,  $i = n$ ,  $j = 0$  e  $j = m$ .

Assim, e considerando exemplificativamente o caso das Opções Put Americanas sobre Acções, sabe-se ser o seu valor, à data de expiração  $T$ , igual<sup>(125)</sup> ao  $\max[X - S_T, 0]$ , onde  $S_T$  representa o preço da Acção associada à Opção no momento  $T$ .

Dito de outra forma<sup>(126)</sup>,

$$f_{n,j} = \max[X - j\Delta S, 0] \quad (6.26)$$

com  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Por outro lado, quando o preço da Acção é nulo<sup>(127)</sup>, o valor da Opção Put considerada é igual ao *striking price*, ou seja,

$$f_{i,0} = X, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6.27)$$

Por fim, sabe-se que o valor da mesma Opção tende para zero<sup>(128)</sup> quando o preço da Acção tende para o seu valor mais elevado,  $S_{\max}$ , ou, o que é equivalente

$$f_{i,m} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6.28)$$

As relações (6.26), (6.27) e (6.28) caracterizam o valor da Opção Put Americana ao longo dos eixos definidos pelos valores extremos  $S = 0$ ,  $S = S_{\max}$  e  $t = T$ .

Resta, finalmente, determinar os valores  $f_{0,j}$ ,  $j = 1, \dots, m-1$ , isto é, os possíveis valores da Opção Put no instante inicial,  $t = 0$ , utilizando, para tanto, a relação (6.25).

(125)  $\max[S_T - X, 0]$  no caso de uma Opção Call Americana.

(126)  $f_{n,j} = \max[j\Delta S - X, 0]$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , *idem*.

(127)  $f_{i,0} = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , se  $f_{i,j}$  representar uma Opção Call Americana.

(128)  $f_{i,m} = S_{\max}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , *idem*.

O cálculo faz-se retroactivamente, determinando-se os valores de  $f_{i,j}$  nos *nodos* correspondentes ao instante,  $T - \Delta t$ , a partir dos valores conhecidos de  $f_{i,j}$  nos pontos relativos ao instante  $T$ , para todo o  $j = 0, 1, \dots, m$ .

Na prática, da relação (6.25), fazendo  $i = n-1$ , obter-se-ão  $m-1$  equações do tipo

$$a_j f_{n-1,j-1} + b_j f_{n-1,j} + c_j f_{n-1,j+1} = f_{n,j} \quad (6.29)$$

isto é, uma para cada  $j = 1, 2, \dots, m-1$ .

Recordemos que, tratando-se de uma Opção Put, os valores,  $f_{n,j}$ , podem ser conhecidos a partir da relação (6.26) e que das relações (6.27) e (6.28), respectivamente, é possível escrever<sup>(129)</sup>

$$\begin{cases} f_{n-1,0} = X \\ f_{n-1,m} = 0 \end{cases}.$$

Assim sendo, da relação (6.29) poder-se-ão obter os  $m-1$  valores desconhecidos,  $f_{n-1,1}, f_{n-1,2}, \dots, f_{n-1,m-1}$ , a partir de outras tantas equações homólogas.

Cada valor  $f_{n-1,j}$ , depois de determinado, é comparado com o valor<sup>(130)</sup>  $(X - j\Delta S)$ .

Caso se verifique a desigualdade<sup>(131)</sup>  $f_{n-1,j} < X - j\Delta S$ , deve concluir-se que a antecipação do exercício da Opção no instante  $T - \Delta t$  é vantajosa, pelo que se deve considerar  $f_{n-1,j}$  igual a  $X - j\Delta S$ .

Os *nodos* relativos ao instante  $T - 2\Delta t$  serão tratados de forma idêntica, repetindo-se o procedimento até se obterem os valores  $f_{0,1}, f_{0,2}, \dots, f_{0,m-1}$ . Estes valores constituem, finalmente, boas aproximações ao valor exacto da Opção em causa.

As soluções obtidas pela aplicação do Método Implícito das Diferenças Divididas convergem para as soluções da própria Equação

<sup>(129)</sup> Respectivamente,  $f_{n,j} = \max[j\Delta S - X, 0]$ ,  $f_{n-1,0} = 0$ ,  $f_{n-1,m} = S_{\max}$  no caso de uma Opção Call Americana

<sup>(130)</sup>  $(j\Delta S - X)$ , tratando-se de uma Opção Call Americana.

<sup>(131)</sup> Se  $f_{n-1,j} < j\Delta S - X$ , então o exercício antecipado da Opção Call Americana no instante  $T - \Delta t$  seria vantajosa, pelo que se deverá considerar  $f_{n-1,j} = j\Delta S - X$ .



Diferencial, sempre que se faça  $\Delta S$  e  $\Delta t$  tenderem para zero, isto é, sempre que  $\Delta S$  e  $\Delta t$  sejam tomados suficientemente pequenos.

Tal facto, que constitui uma indiscutível vantagem deste método, é, por vezes, secundarizado quando confrontado com a obrigatoriedade de se terem que resolver - para a determinação dos valores procurados,  $f_{i,j}$ , a partir dos valores conhecidos  $f_{i+1,j} - (m-1)$  equações do tipo (6.29).

Este Método pode, contudo, ser simplificado se se pensar que as aproximações às derivadas parciais,  $\frac{\partial f}{\partial S}$ , e  $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ , calculadas no *nodo*  $(i, j)$ , são iguais às aproximações que se obtêm caso o cálculo seja feito considerando o *nodo*  $(i+1, j)$ .

### 3.2. MÉTODO EXPLÍCITO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Promovendo tais alterações obter-se-iam, alternativamente a (6.22) e a (6.23), as seguintes aproximações:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j-1}}{\Delta S^2}$$

a partir do que se chegaria à expressão

$$f_{i,j} = a_j^* f_{i-1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1} \quad (6.30)$$

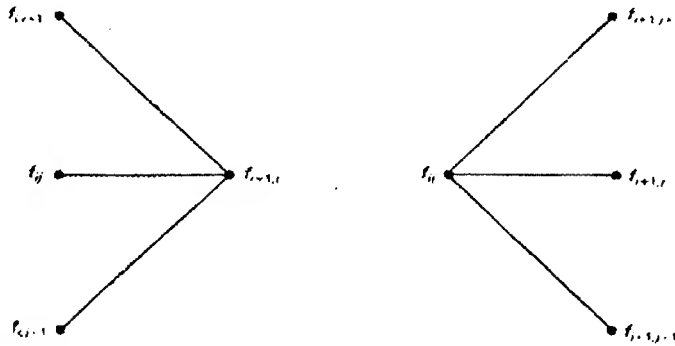
onde

$$\begin{cases} a_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} \left( -\frac{1}{2} rj\Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right) \\ b_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} (1 - \sigma^2 j^2 \Delta t) \\ c_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} \left( \frac{1}{2} rj\Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right) \end{cases}$$

Esta segunda via de cálculo é designada por Método Explícito das Diferenças Divididas.

Assim, enquanto o Método Implícito das Diferenças Divididas [vd.(6.25)] estabelece uma relação envolvendo três diferentes valores

de uma Opção no instante  $i\Delta t - f_{i,j-1}$ ,  $f_{i,j}$  e  $f_{i,j+1}$  - e um valor da mesma Opção no instante  $(i+1)\Delta t - f_{i+1,j}$  -, o Método Explícito [vd.(6.30)], pelo contrário, relaciona um valor da Opção no instante  $i\Delta t - f_{i,j}$  - com três diferentes valores da mesma Opção relativos ao instante  $(i+1)\Delta t - f_{i+1,j-1}$ ,  $f_{i+1,j}$  e  $f_{i+1,j+1}$  .



**Figura 6.7** Método Implícito vs Método Explícito das Diferenças Finitas

Quanto ao *modus operandi*, e no que respeita a Opções do tipo Americano, ele coincide, iteração a iteração, num e outro método [vd. 3.1 - caso de uma Opção Put Americana].

Simplificações aos Métodos Numéricos das Diferenças Finitas anteriormente apresentados são possíveis de fazer, considerando a transformação *logarítmica* da Equação Diferencial de Black-Scholes.

No que se segue analisaremos as *versões logarítmicas* dos Métodos Explícito e Implícito das Diferenças Finitas.

### 3.3. MÉTODOS DAS DIFERENÇAS FINITAS VERSÃO LOGARÍTMICA

Sendo a expressão formal da Equação Diferencial de Black-Scholes dada pela relação

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} = rf \quad (6.31)$$

onde  $f(t, S)$ ,  $S$ ,  $\sigma^2$  e  $t$  representam, respectivamente, o valor da Opção, o preço do activo associado, a correspondente variância instantânea e o tempo, obtém-se a sua transformação logarítmica definindo

$$\Theta = \ln(S)$$

e considerando

$$w(t, \Theta) = f(t, S).$$

Daqui resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial w}{\partial \Theta} e^{-\Theta}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} - \frac{\partial w}{\partial \Theta} \right) e^{-2\Theta}$$

e ainda que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Da sua substituição em (6.31) resulta a Equação Diferencial transformada

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial w}{\partial \Theta} + \frac{\partial w}{\partial t} = r w. \quad (6.32)$$

Esta, contrariamente à equação (6.31), é uma Equação Diferencial Parcial de coeficientes constantes. Esta circunstância simplifica muito a análise numérica, observando-se mesmo que, a partir da sua utilização, o Método Explícito das Diferenças Finitas - *instável*<sup>(132)</sup> quando obtido por (6.31) - conduz a aproximações estáveis.

### 3.3.1. MÉTODO EXPLÍCITO DAS DIFERENÇAS FINITAS VERSÃO LOGARÍTMICA

De modo idêntico ao anteriormente exposto, obtem-se para (6.32) uma aproximação do tipo das Diferenças Finitas, substituindo-se as Derivadas Parciais existentes pelas correspondentes *diferenças finitas*.

<sup>(132)</sup> GESKE, R. e SHASTRI, K., "Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 20, no.1, March 1985.

Nesse contexto, defina-se

$$w(t, \Theta) = w(i\Delta t, j\Delta\Theta) = w_{i,j}$$

onde  $\Delta t$  e  $\Delta\Theta$  representam variações discretas, respectivamente, dos parâmetros  $t$  e  $\Theta$ .

Relativamente à *versão logarítmica* do Método Explícito das Diferenças Finitas, as derivadas parciais podem ser aproximadas do seguinte modo:

$$\frac{\partial w}{\partial \Theta} = \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j-1}}{2\Delta\Theta}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} = \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i-1,j-1}}{\Delta\Theta^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\Delta t}$$

a partir do que se obtém a seguinte equação

$$w_{i,j} = \frac{1}{(1+r\Delta t)} \left[ aw_{i-1,j-1} + bw_{i+1,j} + cw_{i+1,j-1} \right], \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m-1 \end{matrix} \quad (6.33)$$

onde

$$a = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\Delta\Theta} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) / \Delta\Theta \right] \Delta t$$

$$b = \left[ 1 - \left( \frac{\sigma}{\Delta\Theta} \right)^2 \Delta t \right]$$

$$c = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\Delta\Theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) / \Delta\Theta \right] \Delta t.$$

Dito de outra forma, para todo o instante  $i$ , a relação (6.33) permite-nos obter o valor de  $w_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, m-1$  a partir do conhecimento do valor dos  $w_{i+1,j}$ ,  $j = 1, \dots, m-1$ . Os valores extremos  $w_{i,0}$  e  $w_{i,m}$  são conhecidos das condições fronteira específicas de cada um dos Produtos Derivados.

Em síntese, conhecidos os valores de  $w_{i,j}$  na maturidade,  $w_{n,j}$ , é possível determinar de modo recursivo quaisquer outros valores de  $w_{i,j}$  utilizando (6.33).

Para que se verifique a estabilidade das soluções assim obtidas, torna-se necessário garantir a não-negatividade dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Uma apropriada selecção de  $\Delta t$  e  $\Delta \Theta$  basta para que a positividade<sup>(133)</sup> dos referidos coeficientes seja assegurada. Ela deve obedecer aos seguintes critérios:

$$\Delta t \leq \sigma^2 / \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \quad \text{e} \quad \Delta \Theta \leq \sigma^2 / \left| r - \frac{\sigma^2}{2} \right|. \quad (6.34)$$

Ainda relativamente a  $a$ ,  $b$  e  $c$ , acresce que os mesmos não só são independentes de  $j$ , como também que a sua soma iguala um, isto é,  $a + b + c = 1$ .

Dito isto, e satisfeitas as condições (6.34), os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da relação (6.33) podem ser interpretados como tratando-se de probabilidades.

Denotando  $a$  por  $p^-$ ,  $b$  por  $p$  e  $c$  por  $p^+$  a relação (6.33) pode ser reescrita do seguinte modo:

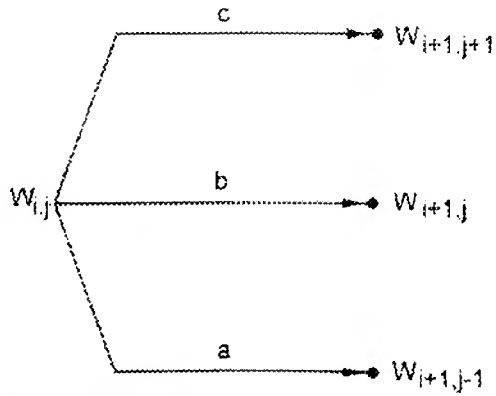
$$w_{i,j} = \frac{1}{(1+r\Delta t)} \left[ p^- w_{i-1,j-1} + p w_{i-1,j} + p^+ w_{i-1,j+1} \right], \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m-1 \end{matrix}. \quad (6.35)$$

Dito de outra maneira, o valor de uma Opção num instante  $i$  é dado pelo valor esperado da mesma Opção instante  $i+1$  actualizado a uma taxa de risco-zero,  $r$ .

Assim sendo, prova-se que a aproximação feita à Equação Diferencial de Black-Scholes pelo Método Explícito das Diferenças Finitas *versão logarítmica* não é mais do que uma aproximação a um processo de difusão, feita por um processo discreto do tipo Trinomial<sup>(134)</sup>.

(133) Os correspondentes coeficientes da aproximação feita a (6.31) não só dependem de  $j$  como ainda podem assumir valores negativos para  $j$ 's elevados.

(134) Ver Ob. Cit nota (122), p. 464.



**Figura 6.8** Interpretação do método explícito das diferenças divididas como se de uma árvore trinomial se tratasse.

Dito de outra forma, a equação (6.35) de avaliação recursiva de uma Opção pode ser interpretada como um processo de integração numérica onde as probabilidades são calculadas a partir de um processo discreto e não tendo por base uma função densidade. Este raciocínio está próximo do procedimento de integração numérica sugerido por Parkinson na aproximação de uma função de distribuição Normal por uma função de distribuição Trinomial relacionada mas, obviamente, distinta.

### 3.3.2. MÉTODO IMPLÍCITO DAS DIFERENÇAS FINITAS VERSÃO LOGARÍTMICA

A aproximação a (6.32) segundo o Método Implícito das Diferenças Finitas na sua *versão logarítmica* é obtida aproximando as respectivas derivadas parciais segundo as diferenças finitas que se seguem:

$$\frac{\partial w}{\partial \Theta} = \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2\Delta\Theta}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} = \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta\Theta^2}$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\Delta t}$$

Posto isto, é possível escrever a Equação Diferencial (6.32) sob a forma numérica de *diferença finita* do seguinte modo:

$$w_{i+1,j} = \frac{1}{(1-r\Delta t)} \left[ aw_{i,j-1} + bw_{i,j} + cw_{i,j+1} \right], \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix} \quad (6.36)$$

onde

$$a = \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\Delta\Theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) / \Delta\Theta \right] \Delta t$$

$$b = \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\Delta\Theta} \right)^2 \Delta t \right]$$

$$c = \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\Delta\Theta} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) / \Delta\Theta \right] \Delta t.$$

Assim, qualquer que seja o instante  $i$  considerado, a relação (6.36) constitui um sistema de  $m-1$  equações a  $m+1$  variáveis,  $w_{i,j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ .

Para que o sistema fique completo será ainda necessário entrar em linha de conta com as condições fronteira específicas de cada Derivado em avaliação.

Assumindo que as mesmas são, genericamente, dadas por<sup>(135)</sup>

$$w_{i,0} = \alpha$$

$$w_{i,m} = \beta$$

é possível eliminar  $w_{i,0}$  e  $w_{i,m}$  das primeira e última equações de (6.36) obtendo-se o sistema

$$\begin{cases} bw_{i,1} + cw_{i,2} = (1 - r\Delta t)w_{i+1,1} - a\alpha \\ \dots \\ aw_{i,j-1} + bw_{i,j} + cw_{i,j+1} = (1 - r\Delta t)w_{i+1,j} \\ \dots \\ aw_{i,m-1} + bw_{i,m} = (1 - r\Delta t)w_{i+1,m} - c\beta \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito sob a forma matricial do seguinte modo:

$$AW = b \tag{6.37}$$

<sup>(135)</sup>  $\alpha = 0$  e  $\beta = S_{\max}$  ( $\alpha = X$  e  $\beta = 0$ ) no caso de uma Opção Call (Put).

onde

$$A_{(m-1,m-1)} = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \end{bmatrix}, W_{(m-1,1)} = \begin{bmatrix} w'_{i,1} \\ w'_{i,2} \\ \dots \\ w'_{i,j} \\ \dots \\ w'_{i,m-1} \\ w'_{i,m} \end{bmatrix}, b_{(m-1,1)} = \begin{bmatrix} (1-r\Delta t)w'_{i-1,1} - a\alpha \\ (1-r\Delta t)w'_{i-1,2} \\ \dots \\ (1-r\Delta t)w'_{i-1,j} \\ \dots \\ (1-r\Delta t)w'_{i-1,m-1} \\ (1-r\Delta t)w'_{i-1,m} - c\beta \end{bmatrix}$$

Assim, conhecidos os valores de  $w_{i,j}$  na maturidade, ou seja,  $w_{n,j}$ , é possível obter os restantes valores de  $w_{i,j}$ , quaisquer que sejam  $i$  e  $j$ , através de um cálculo recursivo usando (6.37).

Acresce que, como a matriz  $A_{(m-1,m-1)}$  é independente de  $i$ , o cálculo da sua inversa só é feito uma única vez, resumindo-se cada um dos passos iterativos a um produto do tipo  $W = A^{-1}b$ .

A aproximação feita à Equação Diferencial (6.32) pelo Método Implícito das Diferenças Finitas na sua *versão logarítmica* é também equivalente a uma aproximação feita a um processo de difusão por um processo discreto<sup>(136)</sup>. No caso, um processo discreto generalizado ("generalized jump process"), o qual admite a possibilidade de o preço futuro de um qualquer activo poder assumir, não três, mas infinitos valores.

Comparativamente ao Método Explícito, o Método Implícito das Diferenças Finitas - ambos em *versão logarítmica* - envolve maior complexidade computacional mas também um rigor potencialmente superior.

## 4. CONCLUSÃO

No Capítulo VI apresentámos três tipos distintos de procedimentos numéricos para a avaliação de Opções.

Dividimo-los em duas categorias. Na primeira falámos das Técnicas de Simulação. Referimo-nos a Árvores de diversa tipologia e ao Método de Monte Carlo. Na segunda das referidas categorias incluímos os Métodos das Diferenças Finitas.

<sup>(136)</sup> Ver Ob. cit nota (122), p. 470.



Relativamente a todos os métodos procurámos evidenciar as suas melhores características não ignorando, no entanto, as piores.

A escolha de qual o método a usar face a uma situação real concreta depende, entre muitas variáveis a ponderar, do particular Produto Derivado a avaliar e do rigor procurado com a mesma avaliação.

O Método de Monte Carlo funciona de modo *prospectivo* partindo do início da vigência do Derivado a avaliar e indo até à sua extinção. Não obstante ser maioritariamente utilizado na valoração de Opções do tipo Europeu, este método comporta a avaliação de uma grande variedade de Produtos Derivados. A sua eficiência cresce com o aumento das variáveis de estado envolvidas no processo de simulação.

As técnicas de simulação em Árvore e os Métodos de Diferenças Finitas funcionam, retroactivamente, do momento da expiração do Derivado para o início da sua vigência. As referidas técnicas comportam-se relativamente bem na avaliação quer de Opções do tipo Europeu, quer do tipo Americano, justificando-se a sua utilização, especialmente, quando se considera a hipótese de pagamento de dividendos.

## CAPÍTULO VII

### ESTUDO DE SIMULAÇÃO

#### 1. INTRODUÇÃO

Apresentámos no Capítulo V o Modelo da Volatilidade Estocástica. Referimo-lo como sendo aquele que melhor descrevia o comportamento estocástico, conjunto, do preço de uma Acção e da correspondente volatilidade.

Uma vez encontrada a Equação Diferencial estocástica a ser satisfeita pelo valor de uma Opção, constactou-se a impossibilidade de se obter uma fórmula explícita para a valoração da mesma num qualquer instante da sua vigência.

Ainda no Capítulo V analisaram-se os *desvios* ou *enviesamentos* resultantes da estimação do valor exacto de uma Opção quando a estimativa é feita a partir da Fórmula de Black-Scholes, supondo constante a volatilidade do preço da Acção associada.

No Capítulo VI demos a conhecer um acervo de Técnicas Computacionais Numéricas, capazes de proporcionarem estimativas de qualidade para o valor exacto de uma Opção.

Procederemos neste Capítulo a um estudo de *Simulação*. Nele serão aplicados alguns dos resultados e técnicas descritas ao longo dos capítulos anteriores.

O estudo considera dois possíveis *Cenários* alternativos, sendo os objectivos a atingir comuns a ambos.

O primeiro objectivo é o de confirmar a existência de *enviesamentos* - relativamente ao valor exacto de uma Opção -, resultantes da aplicação da Fórmula de Black-Scholes. A tipologia do enviesamento será qualificada e comparada com os correspondentes resultados expressos no Capítulo V [vd. 3.2.1 e 3.2.2].

O segundo objectivo é o de concluir àcerca do rigor das aproximações obtidas a partir das Técnicas Numéricas apresentadas, e em especial da Técnica de Simulação segundo o Método de Monte Carlo, quando comparadas com os correspondentes valores de Black-Scholes.

## 2. ESTUDO DE SIMULAÇÃO

No *Cenário I* considera-se a hipótese do preço da Acção e da respectiva volatilidade, ambos estocásticos, possuírem correlação nula, ou seja, pressupõe-se que  $\rho = 0$ .

No *Cenário II* admite-se a hipótese contrária, assumindo-se que o preço da Acção e a correspondente volatilidade, ambas estocásticas, estão correlacionadas, ou seja, considera-se que  $\rho \neq 0$ .

### 2.1. METODOLOGIA ADOPTADA PARA O CENÁRIO I

Provou-se no Capítulo V, utilizando o Método da Volatilidade Estocástica, que, a verificarem-se as condições referidas no *Cenário I*, o valor exacto de uma Opção coincide com o valor esperado do valor de Black-Scholes da mesma Opção, calculado, no que resta da sua vigência, em relação à variância média do preço da Acção associada.

Neste Capítulo, concentraremos o nosso estudo no caso particular de uma Opção Call Europeia que não prevê o pagamento de quaisquer *dividendos*.

No cálculo da estimativa do valor exacto da Opção optámos pela utilização do Método de Monte Carlo [vd. Capítulo VI] por ser aquele que, nas condições referidas, pode assegurar um maior rigor de cálculo.

Nesse sentido, começaremos por dividir o tempo de duração da Opção em  $n$  períodos<sup>(137)</sup> de igual amplitude  $\Delta t$ .

Uma vez definidos os  $n$  períodos referidos, e supondo que o valor da variância no instante inicial  $v_0$  é conhecido, iniciaremos a simulação da variância do preço da Acção associada à Opção, admitindo que a mesma se submete ao seguinte Processo Estocástico:

$$\ln \left[ \frac{v(t + \Delta t)}{v(t)} \right] \sim N \left( \left( \phi - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \Delta t, \varepsilon^2 \Delta t \right)$$

Dito de outro modo, é possível estimar o valor da variância do preço de uma Acção no final do  $i + 1$ -ésimo período - designemo-la por  $v_{i+1}$  -, a partir de uma estimativa  $v_i$  relativa ao período anterior, isto é, ao  $i$ -ésimo período, do seguinte modo:

$$v_{i+1} = v_i \exp \left[ \left( \phi - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \Delta t + \varepsilon a_i \sqrt{\Delta t} \right]$$

onde  $a_i$  representa um valor de uma lei de probabilidade Normal Standard.

Posto isto, toma-se para valor da variância do preço da Acção a média aritmética das estimativas entretanto obtidas pelos  $v_i$ 's, com  $i = 0, \dots, n$ , e, a partir dela, determina-se o correspondente valor de Black-Scholes da Opção.

Adoptando como técnica melhorativa da solução procurada a anteriormente referenciada *Antithetic Variable Technique* [vd. Capítulo VI], desencadeia-se, em simultâneo, igual procedimento de cálculo, tomando, porém, para valores de  $a_i$  os valores simétricos dos inicialmente obtidos, isto é, considerando os valores  $-a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Em função destes últimos valores obtém-se, em primeiro lugar, um outro valor para a estimativa da variância; e, a partir desta, um segundo valor de Black-Scholes para a mesma Opção.

---

<sup>(137)</sup> Consideraremos  $n = 100$ .

Designando, respectivamente, por  $c_{1j}$  e  $c_{2j}$  cada um dos valores anteriormente calculados - ambos respeitantes ao  $j$ -ésimo *passo de simulação* -, considera-se o valor médio de  $c_{1j}$  e  $c_{2j}$  uma boa estimativa do valor exacto da Opção.

Representando a referida estimativa por  $c_j$ , em referência ao *passo de simulação* em causa, teremos assim que,

$$c_j = \frac{c_{1j} + c_{2j}}{2}.$$

A repetição um número alargado de vezes<sup>(138)</sup> de idênticos *passos de simulação*, permite, por fim, uma boa estimativa do valor exacto da Opção, considerando-se que a mesma se obtém fazendo:

$$C = \frac{\sum_{j=1}^{Num} c_j}{Num}$$

O erro<sup>(139)</sup> padrão cometido por este estimador do valor exacto da Opção será [vd. n.r.p.(16) Cap VI] dado por

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{Num} (c_j - C)^2}{Num(Num - 1)}}.$$

Para validar uma análise comparativa do tipo daquela que aqui se pretende realizar, determinam-se, complementarmente, os valores de Black-Scholes para a mesma Opção, pressupondo constante a variância do preço da Acção associada e de valor igual:

- a). ao valor da variância no instante inicial;
- b). ao valor esperado<sup>(140)</sup> da variância média no que resta de duração da Opção.

(138) Designaremos por  $Num$  o número de *passos de simulação* a efectuar. Neste trabalho considera-se  $Num = 1000$ .

(139) Na implementação da simulação considerou-se a seguinte igualdade:

$$\sum_{j=1}^{Num} (c_j - C)^2 = \sum_{j=1}^{Num} c_j^2 - \frac{1}{Num} \left( \sum_{j=1}^{Num} c_j \right)^2$$

(140) Este último valor é obtido a partir da média aritmética dos valores médios parciais dos  $v_i^1 s$ , com  $i = 0, \dots, n$ , obtidos nos  $j = 1, \dots, Num$  diferentes *passos de simulação*.

Far-se-á ainda um estudo de sensibilidade com o objectivo de concluir acerca do modo como as variações no tempo de duração da Opção, e da variância inicial do preço da Acção, influenciam os *enviesamentos* observados nos valores das Opções quando calculados pela fórmula de Black-Sholes.

Toda a programação necessária à implementação computacional dos métodos referidos foi feita em *Turbo Pascal for Windows* e executada num PC.

Os programas incluem ainda, por cada cenário considerado, ficheiros relativos: ao valor exacto da Opção; ao erro padrão associado ao estimador; às estimativas obtidas a partir da fórmula de Black-Scholes supondo a variância fixa.

Os valores aleatórios auxiliares necessários à implementação da simulação foram obtidos utilizando o seguinte resultado:

**Dadas duas variáveis aleatórias  $U_1$  e  $U_2$  independentes e uniformemente distribuídas no intervalo  $(0,1)$ , então, as variáveis**

$$\begin{aligned} N_1 &= \sqrt{-2\ln(U_1)} \cos(2\pi U_2); \\ N_2 &= \sqrt{-2\ln(U_1)} \sin(2\pi U_2); \end{aligned}$$

**são independentes com distribuição Normal Standard.**

No cálculo do valor de Black-Scholes de uma Opção com variância constante utilizaremos a seguinte aproximação<sup>(141)</sup>:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - \Phi'(x)(a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + a_4 k^4 + a_5 k^5) & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - \Phi(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

onde  $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ,  $k = \frac{1}{1 + \gamma x}$ ,  $\gamma = 0.2316419$ ,  $a_1 = 0.319381530$ ,  $a_2 = -0.356563782$ ,  $a_3 = 1.781477937$ ,  $a_4 = -1.821255978$ ,  $a_5 = 1.330274429$ .

As Tabelas de valores a serem apresentadas neste capítulo resultam de combinações de diversos ficheiros feitas com a ajuda de uma *folha de cálculo* Excel.

<sup>(141)</sup> Abramowitz, M., Stegun, I., "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, 1972, New York.

Os Gráficos associados reflectem os *enviesamentos* obtidos. Os mesmos são calculados a partir da diferença entre o exacto valor da Opção e o valor de Black-Sholes, sendo expressos em função da percentagem que representam do valor de Black-Sholes.

A listagem de cada um dos programas será apresentada em Apêndices individuais para melhor reconhecimento do método em causa.

A escolha dos *prefixos* atribuídos às distintas variáveis teve por objectivo proporcionar: máxima fidelidade às notações usadas; rápida identificação dos procedimentos de cálculo; total compreensão do método programado. Assim, por exemplo: *cvex* designará o valor exacto da Opção Call, *cvexdp* o seu desvio padrão e *cvbs* o correspondente valor de Black-Scholes da mesma Opção.

### 2.1.1. INICIALIZAÇÃO DE VARIÁVEIS

O estudo de simulação que se pretende realizar obriga a que se arbitrem os seguintes parâmetros:  $S$ ,  $X$ ,  $r$ ,  $\sigma^2$ ,  $T$ ,  $t$ ,  $\mu$ ,  $\phi$ ,  $\xi$  e  $\rho$ .

Sem perda de generalidade, far-se-á  $t$  igual ao instante inicial, ou seja,  $t = 0$ , pelo que consideraremos representar  $T$  o tempo, medido em anos, até ao vencimento da Opção.

O estudo inicia-se fazendo  $T = 0.5$  (6 meses), sendo, mais tarde, consideradas as hipóteses  $T = 0.25$  (3 meses) e  $T = 0.75$  (9 meses). Procurou-se, deste modo, perceber como variações no tempo de duração se repercutem nos *enviesamentos* otidos.

Far-se-á variar a razão entre o preço da Acção e o preço do exercício da Opção,  $S/X$ , entre uma situação de Opção *deeply-out-of-the-money* e uma situação de Opção *deeply-in-the-money*, fixando  $X = 100$  e promovendo o incremento do valor inicializado de  $S = 70$  segundo um *passo* = 0.05.

À *tendência* do processo estocástico seguido por  $S$  - parâmetro designado neste trabalho por  $\mu$  - será arbitrado um valor igual ao que se atribuir à taxa de juro instantânea de risco-zero, sendo, este último valor, por sua vez, fixado, arbitrariamente, em 4% (aproximadamente igual ao valor da Taxa de Juro da *Lisbor* a seis meses).

O valor inicial fixado para a variância do preço da Acção,  $\sigma^2$ , será de 10%, promovendo-se ainda um estudo de sensibilidade do valor da Opção à sua variação para valores na ordem dos 15% e 20%.

Quanto aos parâmetros  $\phi$  e  $\xi$ , respectivamente, *tendência* e *difusão* do processo estocástico seguido pela variância  $\sigma^2$ , serão considerados constantes, dando-se ao primeiro o valor 0 e ao segundo o valor 1.

Ao parâmetro  $\rho$  será atribuído o valor zero, dado ter-se assumido como hipótese de estudo para o *Cenário I* a inexistência de correlação entre o preço da Acção e a correspondente variância.

### 2.1.2. ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Apresentam-se de seguida os resultados obtidos com o estudo de simulação pormenorizado em 2.1. e 2.1.2.

A conclusão a retirar é a de que a fórmula de Black-Scholes não valoriza convenientemente as Opções Call quando a volatilidade do preço da Acção associada é estocástica.

Com efeito, do **Gráfico I** percebe-se que o uso da fórmula de Black-Scholes conduz à subvalorização (dada a ocorrência de *enviesamentos* positivos) de Opções Call quer *deeply-out-of-the-money* quer *deeply-in-the-money* e à sobrevalorização (dada a ocorrência de *enviesamentos* negativos) de Opções Call *at-the-money*.

No primeiro caso, os *enviesamentos* (positivos) observados são particularmente notórios numa situação *deeply-out-of-the-money* mas pouco significativos para Opções Call *deeply-in-the-money*.

Os *enviesamentos* (negativos) de maior amplitude verificam-se com Opções *out* e *at-the-money*. Será, pois, sobre eles que mais nos iremos deter.

As conclusões anteriores são reforçadas a partir de duas análises de sensibilidade feitas considerando variações nos valores arbitrados para o *tempo de duração da Opção* e para a *variância inicial*.

Os **Gráfico II** e **III** ilustram o que se disse.



Relativamente ao valor inicial da variância do preço da Acção, observa-se que os *enviesamentos* (negativos) registados para Opções Call *out-the-money*, *at-the-money* e *in-the-money* se acentuam com o seu aumento. Esta constatação é, contudo, menos evidente no caso de Opções *in-the-money* dado que o *enviesamento* obtido tende para zero [vd. Gráfico II].

Identica conclusão é possível de ser obtida a partir de um estudo de sensibilidade do *enviesamento* relativamente à variação do tempo de duração da Opção.

Assim, quanto maior for o prazo de expiração da Opção maiores serão os *enviesamentos* (negativos) obtidos para as Opções Call *out-the-money* e *at-the-money* calculadas pela fórmula de Black-Scholes. O efeito possui menor significado tratando-se de Opções Call *in-the-money* [vd. Gráfico III].

Em resumo, a Fórmula de Black-Scholes não constitui a via mais rigorosa de avaliação de Opções quando o *activo* que lhe está associado possui volatilidade estocástica. A constatação deste facto é particularmente evidente para as Opções Call *out-the-money* e *at-the-money* sendo-o menos para Opções Call *in-the-money*.

O estudo permitiu ainda concluir que os *enviesamentos* obtidos dependem, quer do *factor* tempo de duração da Opção, quer do *factor* valor da variância no instante inicial.

## 2.2. METODOLOGIA ADOPTADA PARA O CENÁRIO II

Nas condições do cenário II, isto é, existindo correlação entre o preço da Acção e a correspondente variância, o valor corrente de uma Opção só é susceptível de ser determinado actualizando o seu valor esperado na data de expiração.

Assim, uma *estimativa* do valor de uma qualquer Opção será obtida actualizando o valor estimado da mesma na data de vencimento  $T$ . No caso de uma Opção Call tal será feito através da relação:

$$e^{-rT} \max(0, s_n - X).$$

O cálculo da estimativa do valor exacto da Opção Call será aqui, mais uma vez, feito utilizando o Método de Monte Carlo [vd. Capítulo VI].

As estimativas do preço da Acção e da correspondente variância no final do  $i$ -ésimo período, respectivamente,  $s_i$  e  $v_i$ , serão obtidas tendo em conta que

$$\ln \left[ \frac{s(t + \Delta t)}{s(t)} \right] \sim N \left( \left( \mu - \frac{v(t)}{2} \right) \Delta t, v(t) \Delta t \right),$$

$$\ln \left[ \frac{v(t + \Delta t)}{v(t)} \right] \sim N \left( \left( \phi - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \Delta t, \varepsilon^2 \Delta t \right),$$

e ainda que

$$\text{corr} \left( \ln \left[ \frac{s(t + \Delta t)}{s(t)} \right], \ln \left[ \frac{v(t + \Delta t)}{v(t)} \right] \right) = \rho.$$

Ora, atendendo a que das três relações anteriores se tira,

$$\ln \left[ \frac{s(t + \Delta t)}{s(t)} \right] = \left( \mu - \frac{v(t)}{2} \right) \Delta t + A \sqrt{v(t) \Delta t}$$

e

$$\ln \left[ \frac{v(t + \Delta t)}{v(t)} \right] = \left( \phi - \frac{\xi^2}{2} \right) \Delta t + A \rho \xi \sqrt{\Delta t} + B \xi \sqrt{(1 - \rho^2) \Delta t}$$

onde  $A$  e  $B$  representam variáveis aleatórias independentes com distribuição Normal Standard, facilmente se intui serem as estimativas de  $s_i$  e  $v_i$  dadas, respectivamente, por

$$s_i = s_{i-1} \exp \left[ \left( \mu - \frac{v_{i-1}}{2} \right) \Delta t + a_i \sqrt{v_{i-1} \Delta t} \right]$$

e por

$$v_i = v_{i-1} \exp \left[ \left( \phi - \frac{\xi^2}{2} \right) \Delta t + a_i \rho \xi \sqrt{\Delta t} + b_i \xi \sqrt{(1 - \rho^2) \Delta t} \right]$$

considerando-se  $a_i$  e  $b_i$  observações amostrais de duas leis de probabilidade Normais independentes, obtidas a partir de uma distribuição Uniforme  $U(0, 1)$ .

Este modo de cálculo de uma estimativa do valor da Opção deverá ser repetido um número suficientemente alargado de vezes (*Num*), considerando-se a média aritmética dos diferentes valores entretanto obtidos, a melhor estimativa do exacto valor da Opção em avaliação.

O erro padrão do estimador considerado é, naturalmente, determinado de forma idêntica àquela que foi enunciada no *Cenário I*.

A análise comparativa será feita nos mesmos termos dos indicados em 2.1, com excepção da alínea b).

O cálculo do *enviesamento* far-se-á também segundo a regra definida em 2.1.

As aproximações numéricas necessárias aos cálculos mantêm-se. As notações utilizadas seguem a mesma lógica.

### 2.2.1. INICIALIZAÇÃO DE VARIÁVEIS

Na arbitragem dos parâmetros consideram-se os mesmos valores de 2.2 exceptuando o valor de  $\rho$  - que aqui será, naturalmente, não nulo -, e os valores iniciais de  $\sigma^2$  e de  $T$ .

No que respeita ao primeiro parâmetro, vamos assumir que existe uma relação de dependência linear positiva entre as variáveis, ou seja, que  $\rho = 1$ . Quanto aos valores iniciais de  $\sigma^2$  e de  $T$ , eles serão, respectivamente, 20% e 0.25 (3 meses).

### 2.2.2 ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos não permitem conclusões tão precisas quanto aquelas a que chegámos na situação anterior.

A partir do **Gráfico IV** é, contudo, perceptível que a Fórmula de Black-Scholes: subavalia as Opções *deeply-out-of-the-money* e *out-of-the-money*; avalia correctamente as Opções aproximadamente *at-the-money*.

O registo dos *enviesamentos* no caso de Opções *in-the-money* converge para zero por valores negativos. Dito de outro modo, a Fórmula de Black-Scholes tende a sobreavaliar ligeiramente as Opções *in-the-money*.

A análise da influência do valor da variância inicial do preço de uma Acção nos *enviesamentos* obtidos a partir da fórmula de Black-Scholes revela que os mesmos, tratando-se de Opções Call *out-of-the-money*, diminuem com o aumento do valor da variância em  $t_0$ .

No que respeita a Opções Call *at-the-money* e *in-the-money* os *enviesamentos* permanecem com pouco significado [vd. Gráfico V].

O efeito da variação do tempo de duração da Opção é aproximadamente idêntico ao da variação do valor inicial da variância do preço da Acção [vd. Gráfico V].

Em síntese, a Fórmula de Black-Scholes não avalia de um modo rigoroso Opções cujo preço da Acção associada e a respectiva volatilidade estejam correlacionados. Particularmente salientes são os *enviesamentos* (positivos) das Opções Call *out-of-the-money*. Em termos percentuais os referidos valores são mesmo bastante superiores aos valores dos *enviesamentos* homólogos obtidos no caso de a correlação ser nula.

### 3. CONCLUSÃO

Confirmaram-se neste Capítulo os indícios "empíricos" de que a Fórmula de Black-Scholes não avalia de modo completamente correcto as Opções sobre Acções cujo preço revele volatilidade estocástica.

Os *enviesamentos* observados dependem do tipo de correlação que se estabelece entre o preço da Acção e a respectiva volatilidade, e da relação preço corrente da Acção vs preço do exercício.

Com efeito, conclui-se que a Fórmula de Black-Scholes sobrevaloriza Opções *out-of-the-money* e *at-the-money* e subvaloriza as Opções *deeply-out-of-the-money* e *deeply-in-the-money*, no caso de existir uma correlação nula entre o preço da Acção associada e a correspondente volatilidade.

Quando a referida correlação existe e é positiva, a Fórmula de Black-Scholes tende a subavaliar Opções *deeply-out-of-the-money* e *out-of-the-money* e a sobreavaliar Opções *in-the-money*.

Percebeu-se igualmente que os valores dos *enviesamentos* observados dependem quer dos valores da volatilidade no instante inicial, quer do tempo de duração da Opção.

r = 0,04; T=0,5; Var(0)=0,1; ro = 0						
S/X	Cvex	Cvbs	Env. Cvbs	Cvbs0	Env. Cvbs0	
0.70	0,646	0,546	0,183	0,533	0,212	
0.75	1,127	1,079	0,044	1,077	0,046	
0.80	1,877	1,917	-0,021	1,950	-0,037	
0.85	3,079	3,250	-0,053	3,227	-0,046	
0.90	4,677	4,932	-0,052	4,958	-0,057	
0.95	6,789	7,091	-0,043	7,165	-0,052	
1.00	9,511	9,888	-0,038	9,839	-0,033	
1.05	12,637	12,957	-0,025	12,949	-0,024	
1.10	16,213	16,460	-0,015	16,447	-0,014	
1.15	20,149	20,319	-0,008	20,278	-0,006	
1.20	24,301	24,355	-0,002	24,385	-0,003	
1.25	28,738	28,718	0,001	28,714	0,001	
1.30	33,317	33,235	0,002	33,218	0,003	

Gráfico I - Valores do Enviesamento da F. Black\_Scholes

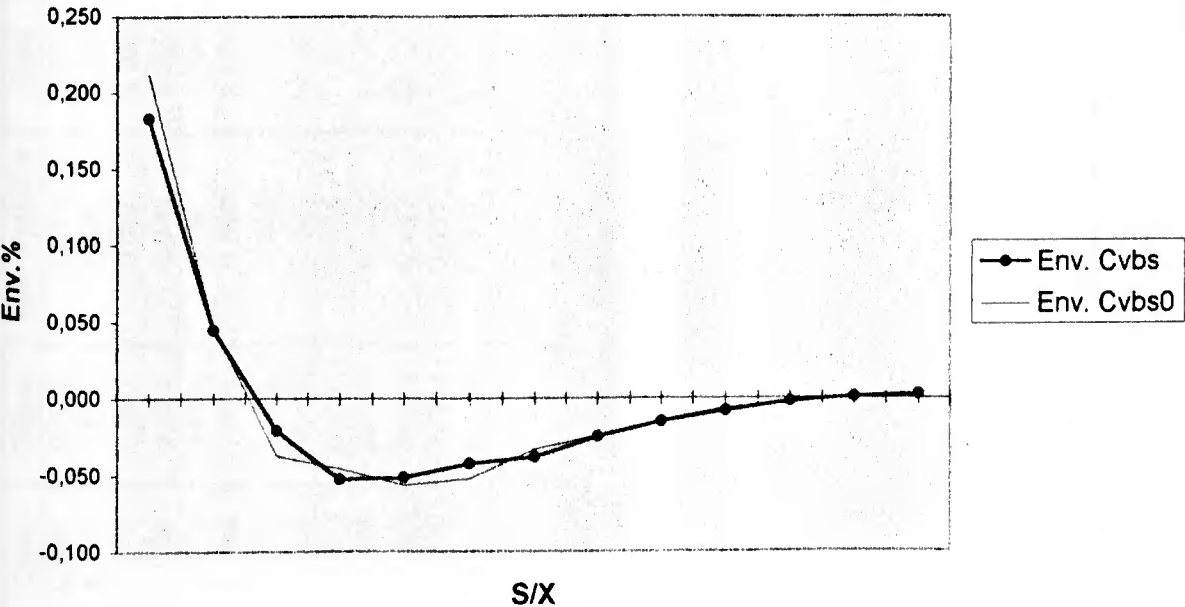


Tabela II

T=0.5; r = 0.04; r0 = 0									
S/X	Cvex	Cvbs0	Env. V(0)=0.1	Cvex	Cvbs0	Env. V(0)=0.15	Cvex	Cvbs0	Env. V(0)=0.2
0.70	0,646	0,533	0,212	1,273	1,190	0,070	1,943	1,911	0,017
0.75	1,127	1,077	0,046	2,009	2,030	-0,010	2,885	2,978	-0,031
0.80	1,877	1,950	-0,037	3,035	3,209	-0,054	4,115	4,376	-0,060
0.85	3,079	3,227	-0,046	4,523	4,766	-0,051	5,803	6,123	-0,052
0.90	4,677	4,958	-0,057	6,346	6,719	-0,056	7,776	8,225	-0,055
0.95	6,789	7,165	-0,052	8,604	9,070	-0,051	10,133	10,674	-0,051
1.00	9,511	9,839	-0,033	11,396	11,802	-0,034	12,982	13,454	-0,035
1.05	12,637	12,949	-0,024	14,487	14,891	-0,027	16,062	16,541	-0,029
1.10	16,213	16,447	-0,014	17,963	18,300	-0,018	19,486	19,908	-0,021
1.15	20,149	20,278	-0,006	21,755	21,993	-0,011	23,195	23,525	-0,014
1.20	24,301	24,385	-0,003	25,725	25,931	-0,008	27,052	27,363	-0,011
1.25	28,738	28,714	0,001	29,992	30,075	-0,003	31,207	31,391	-0,006
1.30	33,317	33,218	0,003	34,410	34,393	0,000	35,512	35,584	-0,002

Gráfico II - Análise dos Enviesamentos em função da Variância inicial Var(0)

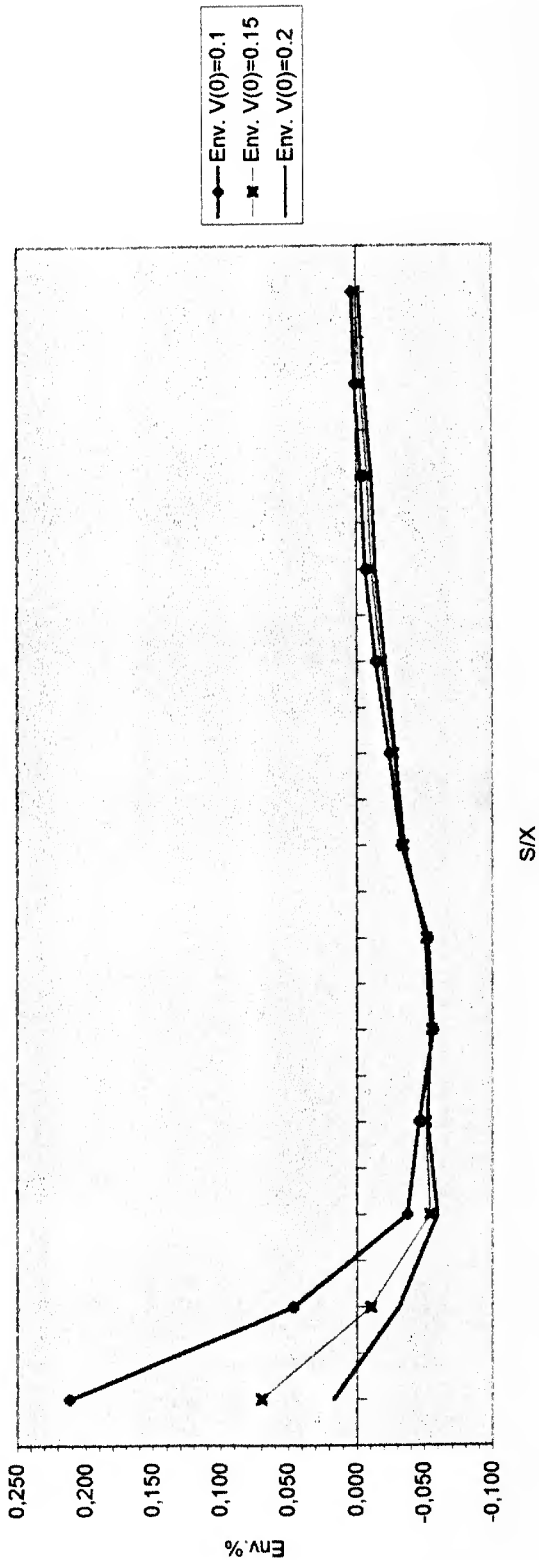
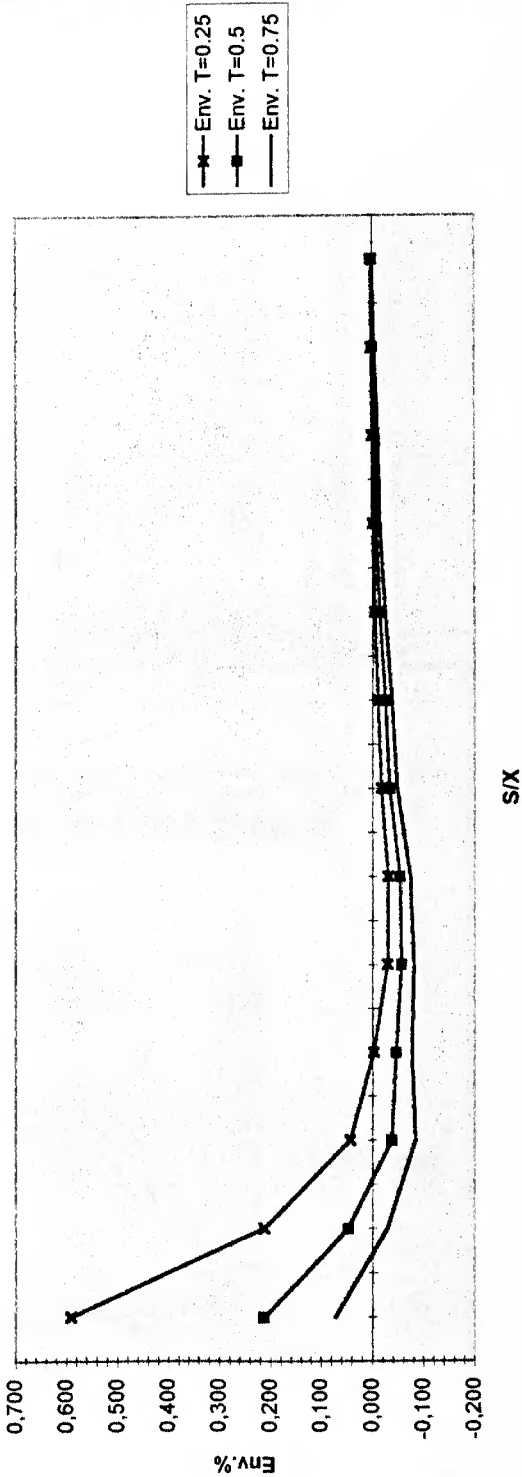


Tabela III

Var0=0,1;r=0,04;ρ=0									
S/X	Cvex	Cvbs0	Env. T=0.25	Cvex	Cvbs0	Env. T=0.5	Cvex	Cvbs0	Env. T=0.75
0.70	0,105	0,066	0,591	0,646	0,533	0,212	1,369	1,277	0,072
0.75	0,262	0,216	0,213	1,127	1,077	0,046	2,100	2,163	-0,029
0.80	0,602	0,577	0,043	1,877	1,950	-0,037	3,115	3,399	-0,084
0.85	1,287	1,290	-0,002	3,079	3,227	-0,046	4,639	5,021	-0,076
0.90	2,430	2,501	-0,028	4,677	4,958	-0,057	6,480	7,044	-0,080
0.95	4,189	4,317	-0,030	6,789	7,165	-0,052	8,780	9,467	-0,073
1.00	6,661	6,780	-0,018	9,511	9,839	-0,033	11,683	12,272	-0,048
1.05	9,759	9,863	-0,011	12,637	12,949	-0,024	14,857	15,430	-0,037
1.10	13,429	13,487	-0,004	16,213	16,447	-0,014	18,435	18,904	-0,025
1.15	17,541	17,545	0,000	20,149	20,278	-0,006	22,335	22,655	-0,014
1.20	21,947	21,928	0,001	24,301	24,385	-0,003	26,373	26,645	-0,010
1.25	26,593	26,540	0,002	28,738	28,714	0,001	30,736	30,835	-0,003
1.30	31,369	31,305	0,002	33,317	33,218	0,003	35,230	35,191	0,001

Gráfico III - Variação do Enviesamento em função do tempo





r = 0.04; var0=0.20; T=0.25; ro=1				
S/X	Cvex	Cvexdp	Cvbs	Env. Cvbs
0,70	0,952	0,142	0,484	0,967
0,75	1,497	0,161	0,987	0,517
0,80	2,012	0,193	1,804	0,115
0,85	3,058	0,251	3,010	0,016
0,90	4,722	0,307	4,660	0,013
0,95	6,228	0,351	6,779	-0,081
1,00	9,075	0,443	9,364	-0,031
1,05	12,439	0,510	12,388	0,004
1,10	15,010	0,527	15,808	-0,050
1,15	20,033	0,656	19,570	0,024
1,20	22,378	0,661	23,617	-0,052
1,25	26,300	0,676	27,897	-0,057
1,30	32,849	0,853	32,361	0,015

Gráfico IV - Enviesamentos da F. de Black-Scholes  
com ro=1

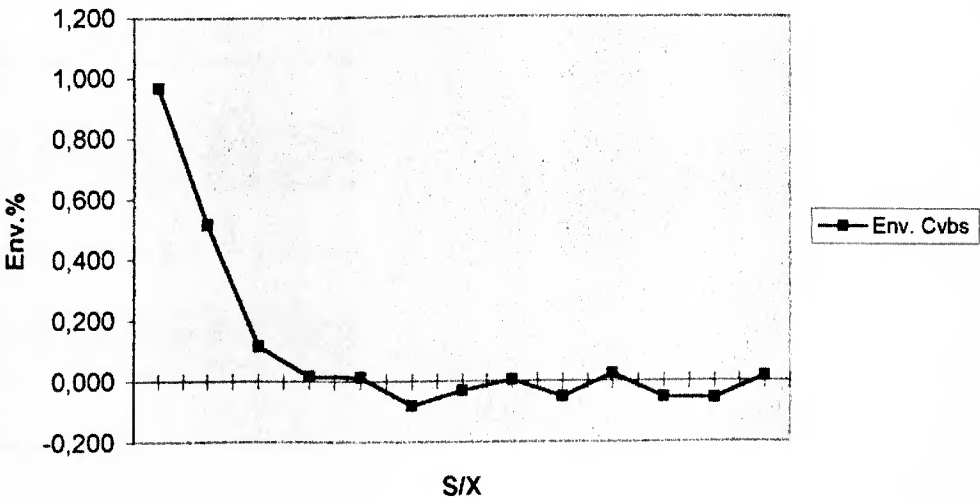




Tabela V

r=0,04; T=0,25; ro=1									
S/X	Cvex	Cvbs	Env. v(0)=0.10	Cvex	Cvbs	Env. v(0)=0.15	Cvex	Cvbs	Env. v(0)=0.20
0,70	0,272	0,066	3,121	0,591	0,235	1,515	0,952	0,484	0,967
0,75	0,442	0,216	1,046	0,955	0,566	0,687	1,497	0,987	0,517
0,80	0,733	0,577	0,270	1,361	1,177	0,156	2,012	1,804	0,115
0,85	1,472	1,290	0,141	2,300	2,176	0,057	3,058	3,010	0,016
0,90	2,635	2,501	0,054	3,750	3,650	0,027	4,722	4,660	0,013
0,95	4,005	4,317	-0,072	5,211	5,649	-0,078	6,228	6,779	-0,081
1,00	6,549	6,778	-0,034	7,920	8,183	-0,032	9,075	9,364	-0,031
1,05	9,798	9,863	-0,007	11,218	11,224	-0,001	12,439	12,388	0,004
1,10	12,887	13,487	-0,044	14,009	14,717	-0,048	15,010	15,808	-0,050
1,15	17,885	17,545	0,019	18,977	18,590	0,021	20,033	19,570	0,024
1,20	21,225	21,928	-0,032	21,752	22,771	-0,045	22,378	23,617	-0,052
1,25	25,604	26,540	-0,035	25,872	27,190	-0,048	26,300	27,897	-0,057
1,30	31,715	31,305	0,013	32,206	31,787	0,013	32,849	32,361	0,015

Gráfico V - Enviesamento em função de var(0)

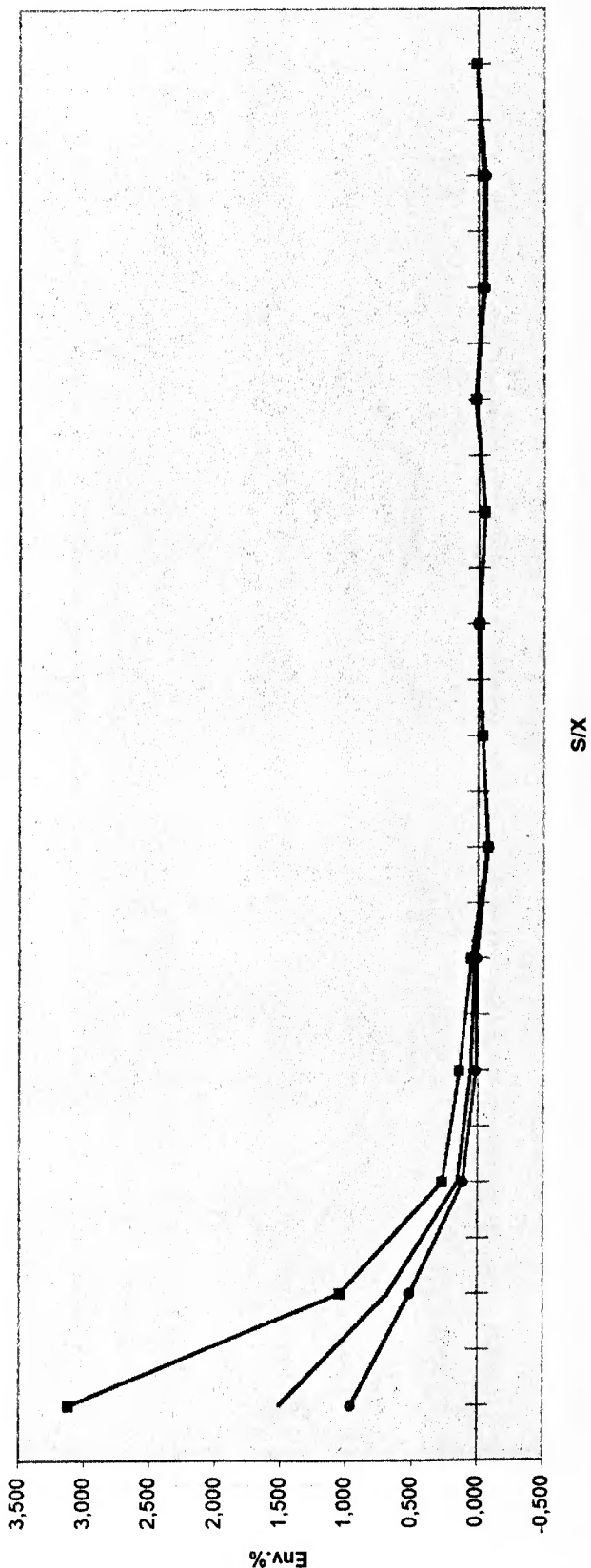
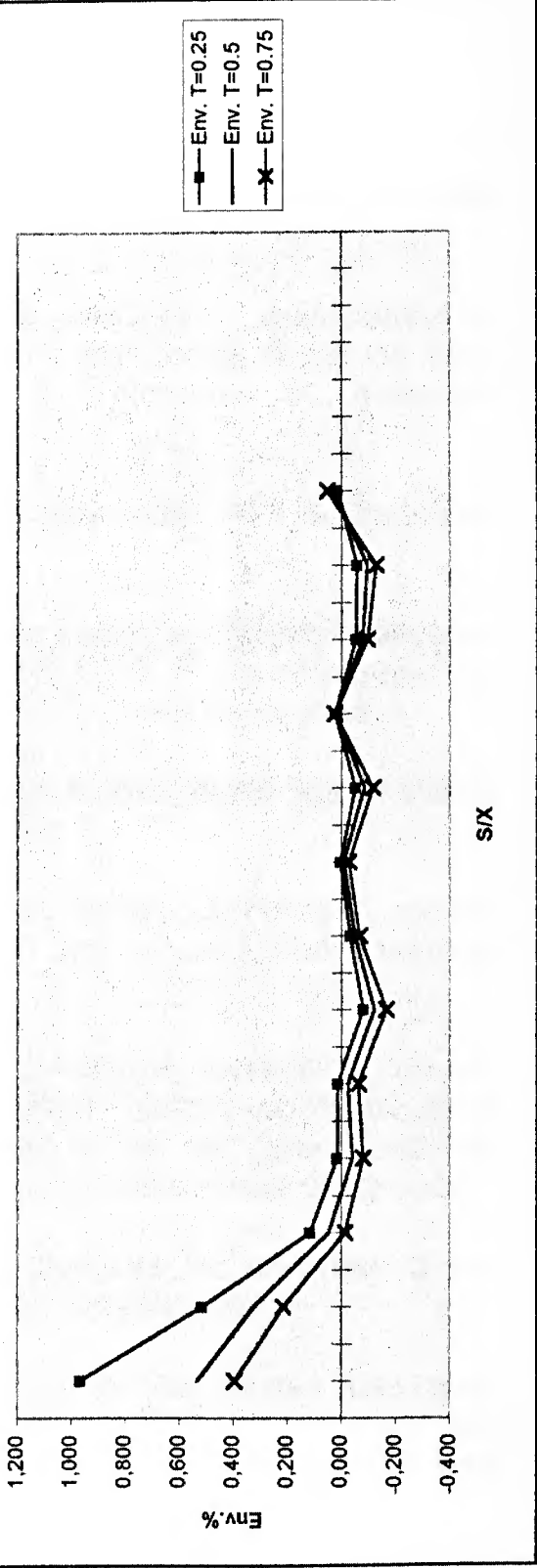


Tabela VI

S/X	Cvex	Cvbs	Env. T=0.25	Cvex	Cvbs	Env. T=0.5	Cvex	Cvbs	Env. T=0.75
0,70	0,952	0,484	0,967	2,932	1,911	0,534	4,900	3,512	0,395
0,75	1,497	0,987	0,517	3,943	2,978	0,324	6,018	4,953	0,215
0,80	2,012	1,804	0,115	4,581	4,376	0,047	6,610	6,699	-0,013
0,85	3,058	3,010	0,016	5,872	6,123	-0,041	8,044	8,753	-0,081
0,90	4,722	4,660	0,013	8,020	8,225	-0,025	10,396	11,105	-0,064
0,95	6,228	6,779	-0,081	9,368	10,674	-0,122	11,479	13,744	-0,165
1,00	9,075	9,364	-0,031	12,801	13,454	-0,049	15,523	16,651	-0,068
1,05	12,439	12,388	0,004	16,409	16,541	-0,008	19,251	19,805	-0,028
1,10	15,010	15,808	-0,050	18,212	19,908	-0,085	20,508	23,187	-0,116
1,15	20,033	19,570	0,024	24,010	23,525	0,021	27,445	26,773	0,025
1,20	22,378	23,617	-0,052	25,227	27,363	-0,078	27,627	30,543	-0,095
1,25	26,300	27,897	-0,057	28,422	31,391	-0,095	30,052	34,476	-0,128
1,30	32,849	32,361	0,015	36,621	35,584	0,029	40,549	38,552	0,052

Gráfico VI - Enviesamento em função de T



## CONCLUSÃO DO TRABALHO

Neste trabalho propusemo-nos inventariar distintos modelos de avaliação de Opções.

Caracterizado o *objecto* de estudo - a Opção -, enunciámos as propriedades gerais que a definem e a cuja observância os seus valores estão obrigados de forma a protegê-las de eventuais estratégias especulativas.

Apresentámos de seguida um primeiro modelo de avaliação de Opções. o Modelo Binomial.

Este modelo evidencia de uma forma clara o princípio económico que está na génese do Modelo de Black-Scholes. É o princípio que nos assegura ser sempre possível constituir um *Portfolio* de risco-zero.

A existência de um *Portfolio* de risco nulo conduziu-nos à ideia de avaliação numa Economia Neutra ao Risco.

O Modelo de Black-Scholes assenta neste mas, também, noutros pressupostos. Alguns possuem mesmo um carácter profundamente limitativo.

Ainda assim, a Fórmula de Black-Scholes é decisiva na correcta avaliação de Opções. A sua importância decorre do facto de a metodologia empregue na sua derivação poder ser generalizada de modo a comportar modelos mais gerais e igualmente mais complexos.

A relativa facilidade com que é aplicada faz com que a sua utilização ocorra em condições, por vezes, desajustadas.

Com efeito, a evidência empírica infirma muitas das suas premissas de base. A mais discutida e criticada de todas tem a ver com a assunção do pressuposto da volatilidade constante do preço de uma Acção.

Hull e White tipificaram exaustivamente os *enviesamentos* resultantes da utilização da Fórmula de Black-Scholes num contexto em que se assume ser a volatilidade estocástica.

Este estudo reflecte a tentativa actual da investigação em *relaxar*, isolada ou conjuntamente, alguma ou algumas das premissas de partida da Fórmula de Black-Scholes.

A procura de modelos que possibilitem a obtenção de valores para as Opções mais ajustados aos reais valores de mercado contempla quer a eventualidade de ocorrer *pagamento de dividendos*, quer a possibilidade de existirem *saltos* abruptos nos preços dos activos associados, quer ainda a hipótese de as taxas de juros seguirem processos estocásticos.

Na prática, a não satisfação de alguns dos pressupostos subjacentes ao Modelo de Black-Scholes obriga à escolha de modelos alternativos. Na selecção do particular modelo a adoptar deverá ser tida em consideração a importância da premissa a *relaxar*, o número de parâmetros a estimar no novo modelo e os custos computacionais que a sua implementação acarreta. Numa só palavra, a sua complexidade.

A superior complexidade matemática de grande parte destes modelos, a par com as necessidades imediatas dos mercados financeiros em matéria de avaliação, dirigiu a procura de boas soluções de compromisso para as chamadas Técnicas Computacionais Numéricas. De entre estas, as técnicas de Simulação têm-se revelado de grande utilidade.

No futuro espera-se que a investigação possibilite compatibilizar as evoluções teóricas às necessidades práticas de avaliação de Produtos Derivados. Se é certo que novos e complexos Produtos Derivados surgirão, também o avanço das Ciências Tecnológicas e, em particular, o desenvolvimento das chamadas *Redes Neurais*, ocorrerá em benefício dos modelos de avaliação.

## **ANEXO MATEMÁTICO**

### **PROCESSOS E INTEGRAIS ESTOCÁSTICOS**

#### **INTRODUÇÃO**

O Capítulo que se inicia tem por objectivo enunciar alguns dos conceitos fundamentais do Cálculo Estocástico, incidindo, em particular, no estudo dos Processos e Integrais Estocásticos.

O objectivo global deste trabalho dispensa a apresentação exhaustiva de grande parte das demonstrações dos resultados apresentados, pelo que nos ficaremos tão só pela sua identificação.

O propósito final deste Capítulo só será concretizado no Capítulo seguinte, quando se estabelecer um Processo Estocástico que descreva a evolução no tempo do preço de uma Acção.

Iniciemos o estudo relativo a Processos e Integrais Estocásticos, com um conjunto de conceitos chave da Teoria da Probabilidade, adiante necessários.

#### **1- NOÇÕES INTRODUTÓRIAS**

Designemos o Espaço Fundamental ou Espaço de resultados por  $\Omega$ .

Define-se  $\sigma$ -álgebra relativamente a  $\Omega$ , como sendo um conjunto  $F$  que verifica as seguintes condições:

$$[1]. \Omega \in F;$$

$$[2]. A \in F \Rightarrow A^c \in F;$$

$$[3]. \text{ se } A_1, A_2, \dots \in F \text{ em número finito ou infinidade numerável} \\ \text{então } A_1 \cup A_2, \dots \in F.$$

Considere-se  $G$  uma qualquer classe de subconjuntos de  $\Omega$ .

Chama-se  $\sigma$ -álgebra **gerada por**  $G$ , e representa-se por  $\sigma(G)$ , à intersecção de todas as  $\sigma$ -álgebra que contêm  $G$ .

Aos elementos de uma qualquer  $\sigma$ -álgebra, chamamos **conjuntos mensuráveis**.

Ao espaço  $(\Omega, F, P)$ , onde  $P$  representa uma *medida* de probabilidade, chamamos **Espaço de Probabilidade**.

Uma variável aleatória<sup>1</sup>  $X(w)$  de  $(\Omega, F, P)$  em  $(\chi, F', P)$  diz-se  $F$ -mensurável se as pré-imagens dos conjuntos mensuráveis de  $F'$  forem conjuntos mensuráveis de  $F$ . Isto é, a variável aleatória  $X(w)$  diz-se  $F$ -mensurável se a todo o acontecimento com significado em  $\chi$  corresponder uma pré-imagem que seja também um acontecimento com significado (em  $\Omega$ ).

Seja  $X(w)$  uma variável aleatória  $F$ -mensurável. Ao conjunto  $U(X(w))$  das *pré-imagens* de todos os conjuntos mensuráveis em  $F'$ , que é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$  - sendo mesmo a menor  $\sigma$ -álgebra com respeito à qual  $X(w)$  é mensurável -, chamamos  $\sigma$ -álgebra **gerada por**  $X(w)$  em  $\Omega$ .

No caso *particular* de  $\chi = \mathfrak{R}$ , considerando  $I$  a classe dos intervalos do tipo  $]a, b] = \{x \in \mathfrak{R} : a < x \leq b, \text{ com } a < b\}$ , chamamos **Corpo de Borel**<sup>2</sup> à menor  $\sigma$ -álgebra de  $\mathfrak{R}$  que contém  $I$ , e representamo-la por  $B = \sigma(I)$ .

<sup>1</sup> Sejam  $w$  um acontecimento e  $\Omega$  um espaço associado a  $w$ . Uma função  $X: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  que a cada elemento  $w \in \Omega$  associa um número real,  $X(w)$ , diz-se uma variável aleatória.

<sup>2</sup> Se nada for dito em contrário, será desta  $\sigma$ -álgebra que tratamos sempre que nos referirmos a uma  $\sigma$ -álgebra de  $\mathfrak{R}$ .

Assim, considerando  $X(w)$  uma função real e finita com domínio em  $\Omega$  e  $F$  uma  $\sigma$ -álgebra relativamente a  $\Omega$ , dizemos que  $X(w)$  é uma **Função Mensurável à Borel** se todo o  $E \in B$  implica  $X^{-1}(E) \in F$ . Dito de outra forma, se  $E$  é um conjunto com significado (em  $\mathfrak{R}$ ), então também  $X^{-1}(E)$  possui significado (em  $\Omega$ ).

Consideremos agora  $X(t, w)$  uma função real finita, definida em  $[0, T] \times \Omega$ , e com valores num espaço de estados  $\mathcal{X}$ , contido em  $\mathfrak{R}$ , que para todo o  $t \in [0, T]$  é uma função mensurável de  $w \in \Omega$ .

A  $\{X(t, w): t \in [0, T]\}$  chamamos um **Processo Estocástico**<sup>3</sup>.

Dito de outro modo, um Processo Estocástico representa uma *família* de variáveis aleatórias, que a cada instante  $t$  tem associada uma realização da variável,  $X(t)$ .

Para cada  $w \in \Omega$ ,  $X(t, w)$ <sup>4</sup> é uma função real em  $t$  que representa uma **trajectória do processo**. A cada  $w$  está associada uma única trajectória.

## 2 - PROCESSOS DE MARKOV

Começemos o estudo dos Processos Estocásticos com a definição de Processo de Markov.

### DEFINIÇÃO 1:

Um processo estocástico  $\{X(t): t \in [0, T]\}$ , contínuo no tempo e assumindo valores em  $\mathfrak{R}$ , diz-se um **Processo de Markov** se

<sup>3</sup> Um processo diz-se *estocástico* quando descreve a evolução "aleatória" do valor de uma variável ao longo do tempo. Isto é, toda a variável cujo valor evolui no tempo de uma forma *incerta*, diz-se seguir um processo estocástico. Distinguem-se processos estocásticos "discretos" de processos estocásticos "contínuos". Os primeiros dizem respeito a variáveis que evoluem no tempo de forma *descontínua*, no sentido de que "(...) the value of the variable can only change at certain fixed points in time (...)"; os segundos aparecem associados a variáveis *contínuas* que evoluem no tempo de forma não discreta, no sentido de que "(...) changes can take place at any time."

<sup>4</sup> Futuramente, serão usadas indistintamente as notações  $X(t, w)$  e  $X(t)$ , utilizando-se a primeira apenas quando se pretender realçar a dependência de  $X$  relativamente a  $w$ .



$$P[X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}] = P[X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}]$$

para todos os  $x_1, \dots, x_n$  reais e todas as sequências de instantes  $t_1, \dots, t_n$ .

Dito de outra forma, um Processo de Markov representa um caso particular de um Processo Estocástico que, na descrição do comportamento futuro de uma variável<sup>5</sup>, somente toma como relevante o valor actual da mesma.

## 2.1 - PROCESSOS DE DIFUSÃO (OU PROCESSOS DE ITO)

Defina-se, de seguida, um Processo particular de Markov cujo interesse será, adiante, entendido.

### DEFINIÇÃO 2:

Um processo  $\{X(t): t \in [0, T]\}$  real diz-se um **Processo de Difusão** se for um Processo de Markov de trajectórias contínuas com probabilidade 1, e se existirem funções  $\mu(t, x)$  e  $\sigma^2(t, x)$  tais que, para todo o  $t \in [0, T]$ , todo o  $x \in \text{Int}(\chi)$  e todo o  $\varepsilon > 0$ , se verifiquem as seguintes condições:

$$[A1] \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) f(t+\Delta t, y|t, x) dy = \mu(t, x);$$

$$[A2] \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 f(t+\Delta t, y|t, x) dy = \sigma^2(t, x);$$

$$[A3] \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} f(t+\Delta t, y|t, x) dy = 0,$$

sendo  $f(t+\Delta t, y|t, x)$  a **função densidade de transição** da variável aleatória condicionada  $[y|X(t) = x]$  ou, o que é equivalente, da variável  $[X(t+\Delta t)|X(t) = x]$ .

<sup>5</sup> No Capítulo IV assumiu-se que o preço de uma Acção segue um Processo de Markov. A Propriedade Markoviana da variação no tempo do preço de uma Acção é, de resto, coerente com a pouco consistente Teoria dos Mercados Eficientes ("weak form of market efficiency").

As condições [A1] e [A2] significam que o deslocamento do processo entre o estado  $x$ , no instante  $t$ , e o estado  $y$ , no instante  $t + \Delta t$ , é traduzido pela expressão

$$\mu(t, x)\Delta t + \delta_x + o(\Delta t)$$

representando  $\delta_x$  uma variável aleatória tal que  $E[\delta_x] = 0$ ,  $\text{var}[\delta_x] = \sigma^2(t, x)\Delta t$  e  $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$  quando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Ou seja, a variável aleatória  $\delta_x$  reflecte a componente aleatória, incerta, do deslocamento do processo no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

A condição [A3] estabelece que em intervalos de tempo suficientemente pequenos é *quase certamente nula* a probabilidade de ocorrerem mudanças de estado do Processo, em módulo, superiores a  $\varepsilon$ . Dito de outra forma, [A3] reflecte a propriedade da continuidade das trajectórias.

As funções  $\mu(t, x)$  e  $\sigma^2(t, x)$  - contínuas em  $t$  e  $x$ , quaisquer que sejam  $t \in [0, T]$  e  $x \in \text{Int}(\mathcal{X})$  - constituem os chamados **parâmetros infinitesimais** do Processo e designam-se, respectivamente, por **tendência**<sup>6</sup> e **difusão**<sup>7</sup> do deslocamento.

Relativamente à função densidade de transição, prova-se que verificadas certas condições de regularidade,  $f(t + \Delta t, y | t, x)$  é susceptível de ser, plena e exclusivamente, determinada a partir dos parâmetros infinitesimais do processo correspondente.

Demonstra-se também ser sempre possível determinar os parâmetros infinitesimais de um qualquer Processo que seja função de outro, previamente conhecido.

É o que afirma o teorema que se segue:

### TEOREMA 1:

Considere-se  $\{X(t): t \in [0, T]\}$  um Processo de Difusão sobre um espaço de estados  $[a, b]$ <sup>8</sup>, com parâmetros infinitesimais  $\mu(t, x)$  e  $\sigma^2(t, x)$ ,

<sup>6</sup> Genericamente identificado como valor esoeado ou média infinitesimal do deslocamento.

<sup>7</sup> Ou variância infinitesimal do deslocamento.

<sup>8</sup> Não se exclui a possibilidade de  $a = -\infty$  nem de  $b = +\infty$ .



e  $G$  uma função estritamente monótona em  $[a, b]$ , de tal modo que a segunda derivada,  $G''(x)$ , seja contínua para todo o  $x \in ]a, b[$ .

Então  $\{Y(t) = G(X(t)): t \in [0, T]\}$  define um **Processo de Difusão** sobre um espaço de estados  $[G(a), G(b)]$ , cujos *parâmetros infinitesimais* são :

$$\begin{aligned}\mu_Y(t, y) &= \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) G''(x) + \mu(t, x) G'(x), \\ \sigma_Y^2(t, y) &= \sigma^2(t, x) [G'(x)]^2.\end{aligned}$$

## 2.2 - MOVIMENTO BROWNIANO

No âmbito deste trabalho, entre outros processos estocásticos, assume particular interesse o estudo do **Movimento Browniano**<sup>9</sup>.

O Movimento Browniano, que é um caso particular de um Processo Estocástico de Markov, apareceu como resposta a uma necessidade da Física Teórica de descrever o movimento errático de uma partícula sujeita a um número elevado de colisões moleculares. A sua aplicação a outros domínios foi-se, posteriormente, concretizando.

### DEFINIÇÃO 3:

Um processo estocástico  $\{X(t): t \in [0, T]\}$  diz-se um **Movimento Browniano**<sup>10</sup> se se verificarem as seguintes condições:

<sup>9</sup> Foi Robert Brown, um botânico inglês, quem primeiro se apercebeu do movimento errático de uma partícula imersa em líquido ou gás, tendo sido Einstein (1905) quem, plenamente, o explicou.

<sup>10</sup> Se a variância do processo for igual a um, isto é, se  $\sigma^2 = 1$ , então  $\{X(t): t \in [0, T]\}$  diz-se um **Movimento Browniano Padrão** ou **Processo de Wiener**.

Por outro lado, considerando um Movimento Browniano qualquer  $\{X(t): t \in [0, T]\}$ , com variância  $\sigma^2 \neq 1$ , é sempre possível construir o correspondente Movimento Browniano Padrão fazendo  $X(t)/\sigma$ .

**[B1]** Os incrementos  $X(t+t_0) - X(t_0)$  têm distribuição *normal* com média zero - isto é, constantemente nula - e variância  $\sigma^2 t$ , ou seja, proporcional à amplitude do intervalo em causa. Dito de outra forma,

$$X(t+t_0) - X(t_0) \sim N(0, \sigma^2 t).$$

**[B2]** Um número finito ou uma infinidade numerável de incrementos,  $X(t+t_i) - X(t_i)$ , relativos a intervalos de tempo disjuntos, são variáveis aleatórias *independentes* com função de distribuição igual à da de **[B1]**.

**[B3]**  $X(t, w)$  é uma função contínua em  $t = 0$ , qualquer que seja o  $w \in \Omega$  e, por convenção, considera-se  $X(0) = 0^{11}$ .

A condição **[B1]** reflecte o princípio segundo o qual, na previsão do comportamento futuro de um qualquer processo, apenas deve relevar o seu estado presente, não sendo determinante o conhecimento da forma como o mesmo evoluiu.

O facto de se supor que o incremento  $X(t+t_0) - X(t_0)$  possui média igual a zero, significa que não existe uma qualquer tendência associada ao deslocamento do processo. Ou seja, este pode evoluir com igual probabilidade quer para valores superiores, quer para valores inferiores, aos verificados no estado actual do processo.

Finalmente, o facto de a variância (ou difusão) do processo ser directamente proporcional à amplitude do intervalo de tempo considerado, significa que o mesmo tende a afastar-se da sua posição actual.

## 2.2.1 - PROPRIEDADES DO MOVIMENTO BROWNIANO

### **[P1]** - Propriedade Markoviana:

O Movimento Browniano é um Processo de Markov em tempo e espaço de estados contínuos.

De facto, a condição **[B2]** da Definição 3 estabelece que conhecido  $X(t_i)$ , a distribuição da variável  $X(t+t_i) - X(t_i)$  não depende do conhecimento de  $X(s)$  para  $s < t_i$ . Assim sendo, conclui-se então que:

---

<sup>11</sup> Se for caso disso, poderá supor-se  $X(0) = x_0$ , com  $x_0 \in \mathfrak{R}$ .

$$\begin{aligned} P[X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}] &= P[X(t_n) - X(t_{n-1}) \leq x_n - x_{n-1}] \\ &= P[X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}] \end{aligned}$$

com  $t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ .

**[P2]** O Movimento Browniano é um *particular* Processo de Difusão com espaço de estados  $]-\infty, +\infty[$  e parâmetros infinitesimais iguais a  $\mu(t, x) = 0$  e a  $\sigma^2(t, x) = \sigma^2$  para todo o  $t$  e todo o  $x$ .

**[P3]** Excepto para  $w$ , pertencente a um conjunto de probabilidade nula, as trajectórias do Movimento Browniano  $\{X(t, w): t \in [0, T]\}$  são funções contínuas relativamente a  $t$ .

**[P4]** Excepto para  $w$ , pertencente a um conjunto de probabilidade nula, as trajectórias do Movimento Browniano  $\{X(t, w): t \in [0, T]\}$  não são funções diferenciáveis relativamente a  $t$ .

**[P5]**<sup>12</sup> A *função densidade conjunta* das variáveis aleatórias  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  com  $t_1 < \dots < t_n$ , e onde cada  $X(t_i)$  representa um Movimento Browniano Padrão, sujeita à restrição  $X(0) = 0$ , é dada por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(t_1, x_1) f(t_2 - t_1, x_2 - x_1) \dots f(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1})$$

onde  $f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$ , a qual corresponde à densidade normal de média 0 e variância  $t$ .

## 2.2.2 - MOVIMENTO BROWNIANO COM TENDÊNCIA

De entre os Movimentos Brownianos, o **Movimento Browniano com Tendência** - também conhecido por **Processo de Wiener Generalizado** - e o **Movimento Browniano Geométrico**, apresentam características que se revestem de particular interesse.

<sup>12</sup> Esta propriedade resulta directamente das condições [B1] e [B2] da definição de Movimento Browniano.

**DEFINIÇÃO 4:**

Um processo estocástico  $\{Z(t): t \in [0, T]\}$  diz-se um **Movimento Browniano com Tendência**<sup>13</sup> se se verificarem as seguintes condições:

**[C1]** Os incrementos  $Z(t+t_0) - Z(t_0)$  têm distribuição normal com média  $\mu t$  e variância  $\sigma^2 t$ , sendo  $\mu$  e  $\sigma$  constantes, ou seja:

$$Z(t+t_0) - Z(t_0) \sim N(\mu t, \sigma^2 t).$$

**[C2]** As condições **[B2]** e **[B3]** da definição de Movimento Browniano.

Prova-se, à semelhança do demonstrado relativamente ao Movimento Browniano, que também o Movimento Browniano com Tendência é um Processo de Markov.

De forma análoga, poder-se-á definir o Movimento Browniano com Tendência como sendo um Processo de Difusão cujos parâmetros infinitesimais  $\mu$  e  $\sigma^2$  são constantes, sendo designados, respectivamente, por *tendência* e *variância* do processo.

**2.2.3 - MOVIMENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO****DEFINIÇÃO 5:**

Seja  $\{X(t): t \in [0, T]\}$  um Movimento Browniano com tendência  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Ao processo definido pela variável

$$Z(t) = \exp(X(t))$$

chama-se **Movimento Browniano Geométrico**<sup>14</sup>.

<sup>13</sup> Dito de outra forma, um **Movimento Browniano com Tendência** é um processo estocástico  $\{Z(t) = X(t) + \mu t, t \in [0, T]\}$ , onde  $\{X(t): t \in [0, T]\}$  representa um **Movimento Browniano** com variância  $\sigma^2$ , e  $\mu$  é uma constante real, conhecida por *tendência* do processo.

<sup>14</sup> Decorre da **Definição 5** que o espaço de estados associado a um movimento Browniano Geométrico é o intervalo  $]0, +\infty[$ .

Seja  $Z(t)$  um Movimento Browniano Geométrico e considere-se uma sequência de instantes  $t_0 < t_1 \dots < t_n$ . Os rácios do tipo

$$\frac{Z(t_1)}{Z(t_0)}, \frac{Z(t_2)}{Z(t_1)}, \dots, \frac{Z(t_n)}{Z(t_{n-1})}$$

são independentes, pois também o são os incrementos homólogos  $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{n-1}) - X(t_{n-2})$ .

Assim, considerando que

$$Z(t) = Z(0) \exp(X(t) - X(0))$$

facilmente se conclui ser

$$E[Z(t)|Z(0) = z] = zE[\exp(X(t) - X(0))].$$

Ora, sendo, por hipótese,  $\{X(t): t \in [0, T]\}$  um Movimento Browniano com tendência  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , então  $X(t) - X(0)$  possui distribuição normal de média  $\mu t$  e variância  $\sigma^2 t$ . Consequentemente, o valor de  $E[\exp(X(t) - X(0))]$  pode ser determinado a partir da *função geradora de momentos* de  $X(t) - X(0)$ , obtendo-se

$$E[Z(t)|Z(0) = z] = z \exp\left[t\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right].$$

Analogamente,

$$E[Z^2(t)|Z(0) = z] = z^2 E[\exp[2(X(t) - X(0))]] = z^2 \exp[2t(\mu + \sigma^2)]$$

pelo que a variância de  $Z(t)$  pode ser escrita da seguinte maneira

$$Var[Z(t)|Z(0) = z] = z^2 \exp\left[2t\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] [\exp(t\sigma^2) - 1].$$

Assim, a partir dos resultados anteriores e tendo por base o Teorema 1, facilmente se conclui que o Movimento Browniano Geométrico é também um Processo de Difusão, cujos parâmetros infinitesimais são:

$$\mu_z(z) = \left( \frac{1}{2} \sigma^2 + \mu \right) z,$$

$$\sigma_z^2(z) = \sigma^2 z^2.$$

De forma idêntica, se se considerar  $Z(t)$  um Movimento Browniano Geométrico com parâmetros infinitesimais  $\mu_z$  e  $\sigma_z^2$ , então

$$Y(t) = \ln(Z(t))$$

é também um Movimento Browniano, cujas média e variância infinitesimais são dadas, respectivamente, por

$$\mu_Y(y) = \frac{\mu_z(z)}{z} - \frac{\sigma_z^2(z)}{2z^2},$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_z^2(z)}{z^2}.$$

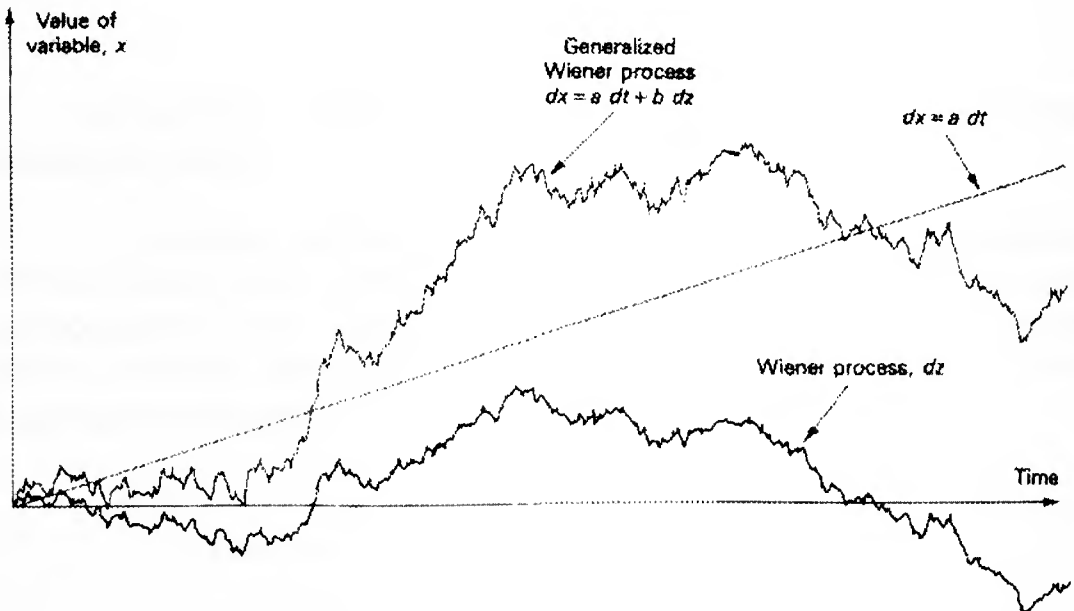


Figura 1 Processo Generalizado de Wiener para  $a=0.3$  e  $b=1.5$



### 3 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA DE ITO.

Suponhamos  $X(t)$  uma função de  $t$  definida no intervalo  $[0, T]$  e seja  $X(0) = x_0$ .

A equação

$$X(t + \Delta t) - X(t) = f(t, X(t))\Delta t + O(\Delta t)$$

onde  $\Delta t$  representa um intervalo de tempo infinitamente pequeno, e  $O(\Delta t)$  é tal que  $\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$  quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , traduz, à custa da função  $f(t, X(t))$ , o incremento ou variação "certa",  $dx$ , observada em  $X(t)$  num período infinitesimal de tempo,  $dt$ .

Assim, qualquer que seja a variação verificada na função  $X(t)$  ela pode sempre ser traduzida a partir da equação diferencial determinística da seguinte forma:

$$dx = f(t, X(t))dt.$$

Admitamos, agora, que  $X(t, w)$  representa um *Processo Estocástico de Ito*.

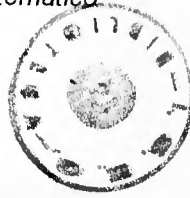
A variação infinitesimal ou, o que é o mesmo, o incremento infinitesimal de  $X(t, w)$ , deve, neste caso, ser expresso a partir de *duas componentes*: uma componente "certa"<sup>15</sup>, determinística, dessa mesma variação, que continuamos a representar por  $f(t, X(t, w))$ ; uma segunda componente, esta aleatória, seja  $\delta(t, w)$ , tal que:

$$[\delta(t + \Delta t, w) - \delta(t, w)] | X(t, w) \sim N[0, \sigma^2(t, X(t, w))\Delta t]$$

sendo  $f$  e  $\sigma$  duas funções reais, ambas com domínio em  $[0, T] \times \mathfrak{R}$ .

---

<sup>15</sup> A componente "certa", determinística, de um Processo, pode ser considerada como sendo a tendência ou valor esperado desse mesmo Processo pelo que, futuramente, vai considerar-se  $f(t, X(t, w)) = \mu(t, X(t, w))$ .



A componente aleatória do incremento infinitesimal do processo  $X(t, w)$  pode, com maior rigor, ser representada da seguinte forma:

$$\delta(t + \Delta t, w) - \delta(t, w) = \sigma(t, X(t, w)) [Z(t + \Delta t, w) - Z(t, w)]$$

sendo  $\{Z(t, w); t \in [0, T]\}$  um Movimento Browniano Padrão.

Resumindo, uma qualquer variação observada em  $X(t, w)$  num intervalo de tempo infinitamente pequeno,  $\Delta t$ , é plenamente traduzida a partir da equação diferencial estocástica

$X(t + \Delta t, w) - X(t, w) = f(t, X(t, w))\Delta t + \sigma(t, X(t, w)) [Z(t + \Delta t, w) - Z(t, w)] + O_p(\Delta t)$  onde  $O_p(\Delta t)$  representa um segundo *factor aleatório*, o qual traduz quer a componente determinística *não explicada* por  $f(t, X(t, w))$ , quer a componente aleatória *não explicada* por  $\delta(t, w)$ . O factor aleatório  $O_p(\Delta t)$

é suposto possuir média nula e ser tal que  $\frac{E[O_p(\Delta t)]^2}{\Delta t} \rightarrow 0$  quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , podendo, no limite, corresponder à função nula.

A equação diferencial anterior, sujeita à restrição<sup>16</sup> inicial  $X(0, w) = X_0(w) = X_0$ , é usualmente conhecida por **Equação Diferencial Estocástica de Ito**.

A sua versão simplificada pode ser escrita da forma que se segue:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dZ(t)$$

significando  $dX(t)$  a variação infinitesimal do processo  $X(t, w)$  ocorrida num intervalo de tempo  $[t, t + dt]$  e onde  $dZ(t)$  representa a variação infinitesimal homóloga de  $Z(t, w)$ .

A Equação Diferencial Estocástica de Ito, sujeita à restrição inicial  $X(0) = x_0$ , admite ainda uma outra representação equivalente, esta sob a forma de integral, que é a seguinte:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dZ(s).$$

<sup>16</sup> A v.a.  $X_0$  pode, eventualmente, degenerar numa constante.

Ora, se o cálculo do **Integral de Riemann**  $\int_0^t f(s, X(s))ds$ , definido como o

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i f(t_i, X(t_i))(t_{i+1} - t_i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i f(t_{i+1}, X(t_{i+1}))(t_{i+1} - t_i)$$

onde  $\varepsilon = \max(t_{i+1} - t_i)$  e  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  não suscita quaisquer dificuldades, já o *integral estocástico*  $\int_0^t \sigma(s, X(s))dZ(s)$  exige um tratamento matemático cuidado, em consequência de o termo aleatório  $dZ$  não possuir existência formal.

Com efeito,  $dZ$  não é susceptível de ser expresso como sendo o

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Z(t + \Delta t) - Z(t)}{\Delta t}$$

em virtude de as realizações do Movimento Browniano não serem funções diferenciais relativamente a  $t$ <sup>17</sup>.

Arnold, na tentativa de formalizar o conceito de **Processo Estocástico Generalizado**, e entendendo o Movimento Browniano como um seu caso particular, mostrou, com base na igualdade das funções covariância, que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Z(t + \Delta t) - Z(t)}{\Delta t} = \xi(t)$$

ou, o que é equivalente,

$$Z_t = \int_0^t \xi(s)ds$$

definindo  $\xi(t)$  como um *Processo "ruído branco"*, o qual não possui existência real.

Seguidamente, tentar-se-á estabelecer um *critério de convergência em probabilidade*<sup>18</sup> para o integral estocástico  $\int_0^t \sigma(s, X(s))dZ(s)$ , o qual, no quadro da definição a ser dada, passará a designar-se por **Integral Estocástico de Ito**.

<sup>17</sup> Recordar **PROPRIEDADES DO MOVIMENTO BROWNIANO**, [P3], pág. 7.

<sup>18</sup> Diz-se que uma sucessão de v.a.'s reais  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  converge em probabilidade para a v.a.  $X$  se, para todo o  $\varepsilon > 0$ ,  $P\{w \in \Omega: |X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

A definição de Integral Estocástico poderia ter sido formulada a partir de outros critérios de convergência, nomeadamente, a partir do *critério da convergência em média quadrática*, de que o critério da convergência em probabilidade é, como se sabe, um caso particular.

#### 4 - INTEGRAL ESTOCÁSTICO DE ITO.

Começemos por definir Integral Estocástico de Ito, especificando também as condições que garantem a sua existência.

##### DEFINIÇÃO 6:

Considere-se  $\{Z(t): t \in [0, T]\}$  um Movimento Browniano definido num espaço de probabilidade  $(\Omega, F, P)$ . Uma família  $F(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , de  $\sigma$ -álgebras de  $F$ , diz-se **não antecipada** com respeito a  $Z(t)$  se:

[1].  $F(t_1) \subset F(t_2)$ , com  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ ;

[2].  $F(t)$  contém a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $Z(s)$ , com  $0 \leq s \leq t$ ;

[3]<sup>20</sup>.  $F(t)$  é independente da  $\sigma$ -álgebra gerada por  $[Z(u) - Z(v)]$ , com  $0 \leq t \leq v \leq u \leq T$ .

##### DEFINIÇÃO 7:

Considere-se uma função  $\sigma(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável em  $(t, w)$ . A função  $\sigma(t, w)$  diz-se **não antecipada** com respeito à família  $F(t)$ ,  $t \in [0, T]$  de  $\sigma$ -álgebras *não antecipadas* se:

[1].  $\sigma(t, \cdot)$  é  $F(t)$ -mensurável para todo o  $t \in [0, T]$ <sup>21</sup>;

[2].  $\int_0^T |\sigma(t, w)|^2 dt$  é finito com probabilidade 1.

##### DEFINIÇÃO 8:

<sup>20</sup> Dito de outra forma, os acontecimentos da  $\sigma$ -álgebra gerada por  $[Z(t + \Delta t) - Z(t)]$ , com  $\Delta t > 0$ , são independentes dos acontecimentos da  $\sigma$ -álgebra  $F(t)$ .

<sup>21</sup> Ou seja, sendo  $E$  um elemento do **Corpo de Borel** então  $\sigma^{-1}(t, E) \in F(t)$ .

Uma função *não antecipada*  $\sigma(t, w)$  diz-se uma **Step Function** se existir uma partição  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  do intervalo  $[0, T]$  tal que<sup>22</sup>

$$\sigma(t, w) = \sigma(t_i, w)$$

para todo o  $t \in [t_{i-1}, t_i]$  com  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Na sequência das três anteriores definições preliminares, dá-se de seguida a primeira definição de Integral Estocástico de Ito, no caso concreto, para Step Functions.

### DEFINIÇÃO 9:

Sejam:  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade;  $\sigma(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}$  uma Step Function *não antecipada* para uma partição  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  de  $[0, T]$ ; e  $Z(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}$  um Movimento Browniano. O Integral Estocástico de  $\sigma(t, w)$  relativamente a  $Z(t, w)$  no intervalo  $[0, T]$ ,

$$\int_0^T \sigma(t, w) dZ(t, w)$$

é uma variável aleatória, que designaremos<sup>23</sup> por  $I(\sigma, w)$ , definida da seguinte maneira:

$$I(\sigma, w) = \sum_{i=1}^n \sigma(t_{i-1}, w) [Z(t_i, w) - Z(t_{i-1}, w)] = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma(t_i, w) [Z(t_{i+1}, w) - Z(t_i, w)].$$

Dada a definição de integral estocástico para uma Step Function, é agora possível pensar na definição homóloga de Integral Estocástico de Ito para uma qualquer função *não antecipada*.

Atente-se, pois, nos dois resultados que se seguem.

### LEMA 1:

Consideremos  $\sigma(t, w)$  uma qualquer função *não antecipada*.

<sup>22</sup> Isto é, entre dois instantes  $t_i$  e  $t_{i+1}$ , ambos independentes de  $w$ , a função  $\sigma(t, w)$  é, constantemente, igual a  $\sigma(t_i, w)$ .

<sup>23</sup> Ou, simplesmente,  $I(\sigma)$ .

Então, existe uma sucessão  $\{\sigma_n(t, w), n \in \mathbb{N}\}$  de Step Functions *não antecipadas* tal que

$$\int_0^T |\sigma_n(t, w) - \sigma(t, w)|^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

com probabilidade 1.

Do Lema 1., facilmente se infere que

$$P\left[w: \int_0^T |\sigma_n(t, w) - \sigma(t, w)|^2 dt > \varepsilon\right] \rightarrow 0$$

para todo o  $\varepsilon > 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , sendo o mesmo equivalente a dizer-se que

$$\int_0^T |\sigma_n(t, w) - \sigma(t, w)|^2 dt \xrightarrow{P} 0. \quad (1)$$

Neste contexto, se se provar que existe, verificando a condição do Lema 1., uma variável aleatória  $\int_0^T \sigma(t, w) dZ(t, w)$  tal que, para todo o  $\varepsilon > 0$ ,

$$P\left[w: \left|\int_0^T \sigma_n(t, w) dZ(t, w) - \int_0^T \sigma(t, w) dZ(t, w)\right| > \varepsilon\right] \rightarrow 0,$$

então será legítimo concluir que:

$$\int_0^T \sigma_n(t, w) dZ(t, w) \xrightarrow{P} \int_0^T \sigma(t, w) dZ(t, w).$$

O segundo Lema, que a seguir se enunciará, é para o efeito, de grande importância.

## LEMA 2:

Seja  $\phi(t) = \phi(t, w)$  uma qualquer Step Function *não antecipada*.

Então, tem-se que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 : P\left[w: \left|\int_0^T \phi(t) dZ(t)\right| > \delta\right] \leq \frac{\varepsilon}{\delta^2} + P\left[w: \int_0^T |\phi(t)|^2 dt > \varepsilon\right].$$

Ora, aplicando o Lema 2. a uma particular Step Function *não antecipada* do tipo  $\phi = \sigma_n - \sigma_m$ , e atendendo a que de (1) se tira

$$\int_0^T |\sigma_n - \sigma_m|^2 dt \xrightarrow{P} 0$$

quando  $n, m \rightarrow +\infty$ , uma vez que

$$\int_0^T |\sigma_n - \sigma_m|^2 dt \leq 2 \int_0^T |\sigma_n - \sigma|^2 dt + 2 \int_0^T |\sigma_m - \sigma|^2 dt$$

conclui-se, então, que

$$P \left[ w: \left| \int_0^T \sigma_n(t) dZ(t) - \int_0^T \sigma_m(t) dZ(t) \right| > \delta \right] \rightarrow 0$$

quando  $n, m \rightarrow +\infty$ .

Dito de outra forma, provamos que a sucessão  $\int_0^T \sigma_n(t) dZ(t)$  é uma **Sucessão Estocástica de Cauchy** no sentido da convergência em probabilidade.

Tal circunstância permite-nos estar certos da existência, com probabilidade quase certamente 1, de uma variável aleatória estocástica única para a qual a sucessão  $\int_0^T \sigma_n(t) dZ(t)$  convergirá em probabilidade.

É o que se afirma na definição que se segue.

#### DEFINIÇÃO 10:

Sejam:  $(\Omega, F, P)$  um espaço de probabilidade;  $\sigma(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  uma função *não antecipada*; e  $Z(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  um Movimento Browniano. O integral estocástico de  $\sigma(t, w)$  relativamente a  $Z(t, w)$  no intervalo  $[0, T]$ ,

$$I(\sigma) = \int_0^T \sigma(t, w) dZ(t, w)$$

é uma *variável aleatória* definida como sendo o limite em probabilidade da sucessão estocástica de Cauchy  $\int_0^T \sigma_n(t, w) dZ(t, w)$ , ou seja:

$$\int_0^T \sigma_n(t, w) dZ(t, w) \xrightarrow{P} \int_0^T \sigma(t, w) dZ(t, w).$$

Dito de outro modo,  $\{\sigma_n\}$  é uma sucessão de Step Functions *não antecipadas* que aproximam  $\sigma$  no sentido de convergência em probabilidade, isto é, no sentido que:

$$\int_0^T |\sigma(t, w) - \sigma_n(t, w)|^2 dt \xrightarrow{P} 0.$$

Prova-se também que  $I(\sigma)$  é único com probabilidade 1, não dependendo o seu valor da escolha que for feita da sucessão  $\{\sigma_n\}$ .

#### 4.1 - PROPRIEDADES DO INTEGRAL ESTOCÁSTICO DE ITO

O teorema que se segue reúne as *propriedades* do Integral Estocástico de Ito.

##### TEOREMA 2:

Considere-se  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade e  $Z(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  um Movimento Browniano Padrão. Então, têm-se os seguintes resultados:

**[P1].** se  $\sigma_1(t, w)$  e  $\sigma_2(t, w)$  são duas funções reais *não antecipadas*, ambas definidas em  $[0, T] \times \Omega$ , e se  $c_1$  e  $c_2$  são duas constantes reais, então

$$\int_0^T [c_1 \sigma_1(t, w) + c_2 \sigma_2(t, w)] dZ = c_1 \int_0^T \sigma_1(t, w) dZ + c_2 \int_0^T \sigma_2(t, w) dZ;$$

**[P2].** se  $\sigma_1(t, w)$  e  $\sigma_2(t, w)$  são duas funções reais *não antecipadas*, ambas definidas em  $[0, T] \times \Omega$ , e  $c_1(w)$  e  $c_2(w)$  são duas variáveis aleatórias tais que a função  $[c_1(w) \sigma_1(t, w) + c_2(w) \sigma_2(t, w)]$  é *não antecipada* em  $[0, T]$ , então

$$\int_0^T [c_1(w) \sigma_1(t, w) + c_2(w) \sigma_2(t, w)] dZ = c_1(w) \int_0^T \sigma_1(t, w) dZ + c_2(w) \int_0^T \sigma_2(t, w) dZ;$$

**[P3].** se  $[t_i, t_j]$  com  $i < j$  é um subconjunto do intervalo  $[0, T]$  e  $I[t_i, t_j]$  representa a *função característica* de  $[t_i, t_j]$ , então

$$\int_0^T I[t_i, t_j] dZ = Z(t_j) - Z(t_i);$$



[P4]. se  $\sigma(t, w)$  é uma função *não antecipada* definida em  $[0, T]$  tal que  $\int_0^T E[\sigma(t, w)]^2 ds < +\infty$ , então

$$E\left[\int_0^T \sigma(t, w) dZ(t)\right] = 0,$$

e

$$E\left[\int_0^T \sigma(t, w) dZ(t)\right]^2 = \int_0^T E[\sigma(t, w)]^2 dt.$$

Por fim, estabelecem-se as *condições gerais* de convergência em probabilidade para uma qualquer sucessão de funções reais *não antecipadas*, e não apenas para Step Functions *não antecipadas*.

### TEOREMA 3:

Considere-se  $(\Omega, F, P)$  um espaço de probabilidade e  $Z(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  um Movimento Browniano. Sejam:  $\{\sigma_n(t, w)\}$  uma qualquer sucessão arbitrária de funções reais *não antecipadas*<sup>24</sup> definidas em  $[0, T] \times \Omega$ ; e  $\sigma(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  uma função *não antecipada*.

Se

$$\int_0^T |\sigma_n(s) - \sigma(s)|^2 ds \xrightarrow{P} 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ , então

$$\int_0^T \sigma_n(t, w) dZ(t, w) \xrightarrow{P} \int_0^T \sigma(t, w) dZ(t, w).$$

## 5 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA DE ITO.

Em síntese, se:  $X(t)$  representar um processo estocástico real  $F(t)$ -mensurável;  $Z(t)$  representar um Movimento Browniano Padrão; sendo  $F(t)$  independente da  $\sigma$ -álgebra gerada por

<sup>24</sup> Não necessariamente Step Functions.

$Z(u) - Z(t)$ ,  $u \geq t$ ,  $\forall u, t \in [0, T]$ ; e considerando as funções  $\mu$  e  $\sigma$  independentes<sup>25</sup> de qualquer  $w \in \Omega$ , então resulta que

$$dX(t, w) = f(t, X(t, w))dt + \sigma(t, X(t, w))dZ(t, w) \quad (2)$$

com  $t \in [0, T]$ , ou, o que é equivalente, na sua forma integral,

$$X(t) - X(0) = \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dZ(s) \quad (3)$$

sujeita à restrição inicial

$$X(0, w) = X_0(w) = X_0. \quad (4)$$

Definidas as condições que asseguram a existência do Integral Estocástico de Ito, importa agora estabelecer também um conjunto de condições, cuja observância garanta a *existência* e *unicidade* das soluções da equação diferencial estocástica (2). Neste contexto, cumpre definir *solução de uma equação diferencial estocástica*.

#### DEFINIÇÃO 11:

Um processo estocástico  $X(t)$  constitui uma **solução** da equação diferencial estocástica (2), sujeita à restrição inicial (4), se se verificarem as seguintes propriedades:

[P1].  $X(t)$  é  $F(t)$ -mensurável<sup>26</sup>;

[P2]. as funções  $f$  e  $\sigma$  são tais que:

$$\int_0^T |f(t, X(t))| dt < +\infty.$$

e

$$\int_0^T [\sigma(t, X(t))]^2 dt < +\infty,$$

com probabilidade 1.

[P3]. a equação diferencial (3) é verificada para todo o  $t \in [0, T]$  com probabilidade 1.

<sup>25</sup> No sentido de que  $w$  apenas indirectamente aparece reflectido nos valores de  $f(t, X(t, w))$  e de  $\sigma(t, X(t, w))$ .

<sup>26</sup> Dito de outra forma,  $X(t)$  é uma variável aleatória não antecipada para  $t \in [0, T]$ .

Assim,

#### TEOREMA 4:

Dada a equação diferencial estocástica (2), sujeita à condição (4), admitam-se válidas as seguintes condições:

[1]. as funções  $f(t, x)$  e  $\sigma(t, x)$ , definidas para todo o  $t \in [0, T]$  e todo o  $x \in \mathbb{R}$ , são mensuráveis relativamente a  $t$  e a  $x$ ;

[2]. existe uma constante  $k > 0$  tal que, para todo o  $t \in [0, T]$  e quaisquer que sejam  $x, x' \in \mathbb{R}$  se tem que:

$$|f(t, x) - f(t, x')| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, x')| \leq k|x - x'|$$

e

$$|f(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq k^2(1 + |x|^2)$$

[3]. a condição inicial  $X(0, w)$  não depende de  $Z(t, w)$  e  $E[X(0, w)^2] < +\infty$ .

Então existe, é único e possui trajectórias contínuas com probabilidade 1, um processo  $X(t)$ , definido em  $[0, T] \times \Omega$  e tal que  $\sup_{t \in [0, T]} E[X(0, w)^2] < +\infty$ , que é solução da Equação Diferencial Estocástica (2) e satisfaz a restrição (4).

A primeira restrição<sup>27</sup> da condição [2]., conhecida por **Condição de Lipschitz**<sup>28</sup>, estabelece que, dada uma variação em  $x$ , a correspondente variação repercutida em  $f(t, x)$  e em  $\sigma(t, x)$  não excede um múltiplo da primeira. Dito de outra forma, a Condição de Lipschitz traduz a ideia de continuidade das funções  $f(t, \cdot)$  e  $\sigma(t, \cdot)$  qualquer que seja o  $t \in [0, T]$ .

<sup>27</sup> O Teorema 4 permanece válido no caso de se substituir a Condição de Lipschitz por uma outra mais geral, a qual afirma que para todo o  $h > 0$ , existe uma constante  $K_h$  tal que, para todo o  $t \in [0, T]$ ,  $|x| \leq h$  e  $|x'| \leq h$ , se tem:

$$|f(t, x) - f(t, x')| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, x')| \leq K_h|x - x'|$$

<sup>28</sup> Uma condição suficiente para que a Condição de Lipschitz se verifique é a de que as funções  $f(t, x)$  e  $\sigma(t, x)$  possuam derivadas parciais contínuas de primeira ordem em relação a  $x$  para todo o  $t \in [0, T]$ , e que estas sejam limitadas em  $[0, T] \times \Omega$ .



A segunda restrição da condição [2]., conhecida por **Condição Restritiva do Crescimento** (Restriction Growth Condition), limita  $f$  e  $\sigma$  uniformemente em relação a  $t \in [0, T]$ , e estabelece, no máximo, um crescimento linear destas funções em relação a  $x$ .

A unicidade da solução, referida no Teorema 4, significa que consideradas duas soluções,  $X(t)$  e  $Y(t)$ , tem-se:

$$P\left[\sup_t |X(t) - Y(t)| = 0\right] = 1.$$

## 5.1 - A SOLUÇÃO COMO UM PROCESSO DE MARKOV.

Satisfeitas certas condições, a solução da Equação Diferencial Estocástica (2) sujeita à restrição inicial (4) é um Processo de Markov. É o que afirma o Teorema 5.

### TEOREMA 5:

Se forem satisfeitas as condições do Teorema 4, então o processo  $X(t)$  que é solução da Equação Diferencial Estocástica (2) sujeita à restrição inicial (4), é um Processo de Markov definido no intervalo  $[0, T]$ , com distribuição de probabilidade no instante  $t = 0$  igual à distribuição de  $X_0$ , e cuja probabilidade de transição é dada da seguinte forma:

$$F(t, y | s, x) = P[X(t) \leq y | X(s) = x].$$

## 5.2 - A SOLUÇÃO COMO UM PROCESSO DE DIFUSÃO (ou de ITO)

O teorema que se segue estabelece *condições suficientes* para que o processo solução da equação (2), sujeita à restrição (4), seja um Processo de Difusão.

### TEOREMA 6:

Considere-se a Equação Diferencial Estocástica (2). Suponham-se verificadas as condições do Teorema 4 e ainda que  $f$  e  $\sigma$  são funções contínuas em relação a  $t$ . Então,  $X(t)$  é um Processo de Difusão com tendência  $f(t, x)$  e coeficiente de difusão  $\sigma^2(t, x)$ .

Dois aspectos importantes devem ainda ser referidos.

Primeiro: a função de densidade de transição de um Processo de Difusão poder ficar, sob certas condições de regularidade, perfeitamente especificada a partir do conhecimento da tendência e da difusão do próprio processo. Ou seja, a referida função pode ser convenientemente determinada sem que se conheça de forma explícita a solução da equação diferencial.

Segundo: se  $X(t)$  representar um Processo de Difusão com tendência  $f(t, x)$  e difusão  $\sigma^2(t, x)$ , mediante a verificação de certas condições de regularidade, e no caso de a função probabilidade de transição de  $X(t)$  obedecer a certas condições de continuidade, então  $X(t)$  é solução da Equação Diferencial Estocástica

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dZ(t)$$

onde  $Z(t)$  representa um Movimento Browniano Padrão.

## 6 - LEMA DE ITO

Um resultado fundamental no cálculo Integral Estocástico é aquele que permite determinar a Equação Diferencial Estocástica a ser satisfeita por um Processo Estocástico "composto", obtido à custa de um outro, previamente conhecido.

Sejam:  $(\Omega, F, P)$  um espaço de probabilidade;  $X(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  um processo estocástico mensurável em relação a  $F(t)$  para todo o  $t \in [0, T]$ ;  $Z(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  um Movimento Browniano;  $\sigma(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  uma função *não antecipada* em  $[0, T]$ ; e seja  $f(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  mensurável para todo o  $t \in [0, T]$  relativamente a  $F(t)$ , tal que  $\int_0^T |f(t, w)| dt < +\infty$  com probabilidade 1.

Então,

### LEMA DE ITO:

Considere-se  $\Phi(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  uma função contínua e diferenciável. Sendo  $X(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  um processo estocástico que satisfaz a equação diferencial estocástica

$$dX(t) = f(t)dt + \sigma(t)dZ(t),$$

então o processo estocástico "composto"  $Y(t, w) = \Phi(t, X(t, w))$  satisfaz em  $[0, T]$  a equação diferencial estocástica

$$d\Phi(t, X(t)) = \left( \frac{\partial \Phi(t, X(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t, X(t))}{\partial x} f(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(t, X(t))}{\partial x^2} \sigma^2(t) \right) dt + \frac{\partial \Phi(t, X(t))}{\partial x} \sigma(t) dZ(t)$$

Dem.

Seja  $\Phi$  uma função de  $t$  e  $X$  contínua e diferenciável.

Sabe-se do cálculo diferencial que uma qualquer variação em  $t$  e  $X$  se repercute em  $\Phi$  do seguinte modo<sup>29</sup>:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \Delta X^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X \partial t} \Delta X \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots \quad (5)$$

Por hipótese,  $X$  é um processo estocástico que satisfaz a equação estocástica de Ito

$$dX(t) = f(t)dt + \sigma(t)dZ(t)$$

cuja versão discreta, simplificada, omitindo os argumentos, é

$$\Delta X = f\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

onde  $\varepsilon$  representa uma variável aleatória<sup>30</sup> com distribuição normal "standard".

Desta última relação tira-se que:

$$\Delta X^2 = b^2 \varepsilon^2 \Delta t + \text{termos em } \Delta t \text{ de ordem superior a um.}$$

Ora, considerando que  $\varepsilon \sim N(0,1)$ , o que implica que  $E(\varepsilon) = 0$  e  $\text{var}(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$ , pode pois concluir-se ser  $E(\varepsilon^2) = 1$ , donde resulta  $E(\varepsilon^2 \Delta t) = \Delta t E(\varepsilon^2) = \Delta t$ .

Por outro lado, dado que se prova ser de ordem  $\Delta t^2$  a  $\text{var}(\varepsilon^2 \Delta t)$ , a variável aleatória  $\varepsilon^2 \Delta t$  pode ser considerada *não-estocástica* pelo que,

<sup>29</sup> O desenvolvimento de  $\Delta \phi$  em série de Taylor assegura-nos grande precisão na estimação de  $\Delta \phi$ .

<sup>30</sup> Ver Definição 3., de MOVIMENTO BROWNIANO, condição [B1], pág. 5.

assim sendo, o seu valor coincide com o valor esperado,  $\Delta t$ , quando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Isto é,  $\sigma^2 \varepsilon^2 \Delta t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \sigma^2 \Delta t$ .

Finalmente, substituindo as expressões entretanto obtidas para  $\Delta X$  e  $\Delta X^2$  na expressão (5), o limite de  $\Delta \Phi$ , quando  $\Delta X$  e  $\Delta t$  tendem para zero, escreve-se:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} (f dt + \sigma dZ) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} (\sigma^2 dt)$$

ou, o que é equivalente

$$d\Phi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sigma dZ.$$

c.q.d.

Especialmente interessante é a aplicação do Lema de Ito quando o processo estocástico em causa é um Movimento Browniano Padrão. Essa situação é analisada no seguinte *corolário* ao Lema de Ito:

### COROLÁRIO 1:

Seja  $\Phi(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  a mesma função do Lema de Ito. Consideremos  $X(t) = Z(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Então, o processo estocástico "composto"  $\Phi(t, Z(t, w))$  satisfaz em  $[0, T]$  a equação diferencial estocástica

$$d\Phi(t, Z(t)) = \left( \frac{\partial \Phi(t, Z(t))}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(t, Z(t))}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial \Phi(t, Z(t))}{\partial x} dZ(t).$$

Acresce que, no caso de  $\Phi$  ser independente de  $t$ , ou seja, de  $\Phi = \Phi(X)$ , tem-se

$$d\Phi(Z(t)) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(Z(t))}{\partial x^2} dt + \frac{\partial \Phi(Z(t))}{\partial x} dZ(t),$$

ou, equivalentemente,

$$\Phi(Z(t)) = \Phi(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \Phi(Z(s))}{\partial x^2} ds + \int_0^t \frac{\partial \Phi(Z(s))}{\partial x} dZ(s),$$

resultado que é conhecido por Teorema Fundamental do Cálculo Integral Estocástico de Ito.

O Lema de Ito pode ser generalizado caso se considerem:  $\Phi(t, X): [0, T] \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^k$ ;  $X(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ;  $Z(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^m$ ;  $f(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$  e  $\sigma(t, w): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ , sendo  $n$ ,  $m$  e  $k$  inteiros positivos.

### LEMA GENERALIZADO<sup>31</sup> DE ITO

Sejam  $X_1(t), \dots, X_n(t)$ ,  $n$  processos estocásticos satisfazendo as equações diferencias estocásticas

$$dX_i(t) = f_i(t, X_1(t), \dots, X_n(t))dt + \sigma_i(t, X_1(t), \dots, X_n(t))dZ_i(t, w)$$

com  $i = 1, \dots, n$ .

Suponham-se os Movimentos Brownianos Padrão,  $Z_i$ , eventualmente correlacionados no sentido de ser possível representar os incrementos  $\Delta Z_i$  e  $\Delta Z_j$ , de  $Z_i$  e  $Z_j$ , ocorridos no intervalo de tempo  $\Delta t$ , respectivamente, por  $\varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$  e por  $\varepsilon_j \sqrt{\Delta t}$ , onde  $\varepsilon_i$  e  $\varepsilon_j$  representam variáveis aleatórias com distribuição normal "standard" e correlação  $\rho_{ij}$ .

Então, se  $\Phi$  é uma função de  $t$  e de  $X_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ou seja, se  $\Phi = \Phi(t, X_1(t), \dots, X_n(t))$ , tem-se:

$$d\Phi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} f_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \sigma_i dZ_i.$$

<sup>31</sup> Esta generalização do Lema de Ito, envolvendo movimentos brownianos correlacionados [ver Hull (1993)], foi obtida para  $m = k = 1$ .



## APÊNDICE A<sup>(1)</sup>

### Demonstração da Proposição 2

Suponha-se, na *demonstração de a)*, que  $c(X_2) > c(X_1)$ , sendo  $X_2 > X_1$ .

Adquirindo a Opção Call de mais baixo preço,  $c(X_1)$ , e vendendo, simultaneamente, a Opção de mais elevado preço,  $c(X_2)$ , define-se uma estratégia que gera um ganho imediato.

Com efeito, caso o titular exerça, antes do prazo de expiração, a Opção vendida/subscrita, exercendo, acto contínuo, a Opção adquirida, obtém um ganho líquido igual a  $X_2 - X_1$ .

Se o titular da Opção subscrita/vendida a mantiver até à data da expiração, três situações podem ocorrer: ou  $S^* \leq X_1$ , ou  $X_1 < S^* < X_2$ , ou, ainda,  $X_2 \leq S^*$ .

Independentemente da ocorrência observada, é seguro que a estratégia anterior jamais acarretará perda, antes possibilitando um ganho, sem risco.

Estamos, assim, perante uma estratégia que define uma *Riskless Arbitrage Opportunity*, o que nega a hipótese inicial desta demonstração, confirmando, por absurdo, a condição a) da Proposição 2.

Admita-se como hipótese, na *demonstração de b)*., a verificação da condição  $c(X_1) - c(X_2) > X_2 - X_1$ , sendo  $X_2 > X_1$ .

Adoptando como estratégia: subscrever/vender a Opção de maior valor,  $c(X_1)$ , comprar a Opção de valor mais baixo,  $c(X_2)$ , e aplicar o remanescente,  $X_2 - X_1$ , a uma taxa de risco-zero, obtém-se, de novo, um ganho imediato.

De facto, no caso de a Opção vendida/subscrita  $c(X_1)$  não ser exercida antecipadamente, mantendo a posição global inalterada até à data de expiração, obtém-se um resultado final líquido igual a

---

(1) Autores e ob. cit. nota 2, pp. 133-135.

$(X_2 - X_1)r^*$  que é sempre positivo, e em que  $r^*$  representa a rentabilidade esperada por cada unidade aplicada à taxa de risco-zero.

Se, pelo contrário, se admitir o exercício antecipado da Opção vendida/subscrita, num instante  $t'$  - anterior à data de expiração - quando o preço do activo é  $S'$  e se  $c(t', S', X_2) > S' - X_2$ , então a Opção  $c(X_2)$  deve ser vendida proporcionando ganho. Caso contrário, a mesma Opção deve ainda assim ser exercida.

Em ambas as situações o montante  $X_2 - X_1$  deve ser retirado da aplicação por forma a saldar a posição global. Ao valor dos juros obtidos, acresça-se o montante  $c(t', S', X_2) - (S' - X_2)$ , na hipótese da Opção  $c(X_2)$  ter sido vendida.

O **Quadro-Síntese I** demonstra que da estratégia referida, qualquer que seja o comportamento do mercado, resulta sempre um ganho sem risco. Estamos, pois, perante uma *Riskless Arbitrage Opportunity*. A sua existência constitui prova da veracidade da condição b).

Considere-se, na *demonstração de c)*., um  $\lambda$  tal que:

$$X_2 = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_3, \quad (1A)$$

ou, o mesmo é dizer, um  $\lambda = \frac{(X_3 - X_2)}{(X_3 - X_1)}$ , donde resulta que  $1 - \lambda = \frac{(X_2 - X_1)}{(X_3 - X_1)}$ .

Se ocorrer  $c(X_2) > \lambda c(X_1) + (1 - \lambda)c(X_3)$  com  $X_1 < X_2 < X_3$ , em violação do que é enunciado em c)., então, adoptando a estratégia de subscrever/vender a Opção  $c(X_2)$  e adquirir  $\lambda$  Opções  $c(X_1)$  mais  $1 - \lambda$  Opções  $c(X_3)$ , obtém-se sempre um ganho.

Com efeito, caso a Opção  $c(X_2)$  não seja antecipadamente exercida, mantendo as restantes posições até à data de expiração, consegue-se um resultado neutro, sem ganho, é certo, mas também sem perda [vd. **Quadro-Síntese II** Coluna 3].

Para provar que  $\lambda(S^* - X_1) + (X_2 - S^*) > 0$  quando  $X_2 < S^* < X_3$ , bastará notar que sendo  $X_3 > S^*$ , então também

$$(1 - \lambda)X_3 > (1 - \lambda)S^*$$

donde

$$\lambda S^* > S^* - (1 - \lambda)X_3$$

pelo que,

$$\lambda S^* - \lambda X_1 > S^* - \lambda X_1 - (1 - \lambda)X_3$$

ou, atendendo a (1A)

$$\lambda(S^* - X_1) + (X_2 - S^*) > 0.$$

Conclui-se, assim, que a referida estratégia nunca acarreta perda, e gera quase sempre ganho, nomeadamente, quando  $X_1 < S^* < X_3$ .

Na hipótese do exercício da Opção  $c(X_2)$  ter sido antecipado para um instante  $t'$ , quando o preço do activo associado se supõe ser igual a  $S'$ , então duas situações são possíveis: ou  $c(t', S', X_1) > S' - X_1$ , caso em que se deve vender a Opção  $c(X_1)$ , resultando daí um ganho; ou  $c(t', S', X_1) \leq S' - X_1$ , caso em que, exercendo as Opções  $c(X_1)$  e  $c(X_3)$ , os custos de aquisição serão cobertos, uma vez que :

$$\lambda(S' - X_1) + (1 - \lambda)(S' - X_3) = S' - X_2.$$

QUADRO SINTESE I

		Data de Expiração		
	Data Corrente	$S^* \leq X_1$	$X_1 \leq S^* \leq X_2$	$X_2 \leq S^*$
Venda Call c/ Strike Price $X_1$	$c(X_1)$	-	$X_1 - S^*$	$X_1 - S^*$
Compra Call c/ Strike Price $X_2$	$-c(X_2)$	-	-	$S^* - X_2$
Aplicação s/ Risco de $(X_2 - X_1)$	$-(X_2 - X_1)$	$(X_2 - X_1)r^*$	$(X_2 - X_1)r^*$	$(X_2 - X_1)r^*$
Total		$(X_2 - X_1)r^*$	$(X_2 - X_1)(r^* - 1) + X_2 - S^*$	$(X_2 - X_1)(r^* - 1)$

QUADRO SÍNTESE II

	Data Corrente	Data de Expiração			
		$S^* \leq X_1$	$X_1 \leq S^* \leq X_2$	$X_2 \leq S^* \leq X_3$	$X_3 \leq S^*$
Venda de 1 Call c/ Strike Price $X_2$	$c(X_2)$	-	-	$X_2 - S^*$	$X_2 - S^*$
Compra de $\lambda$ Call c/ Strike Price $X_1$	$-\lambda c(X_1)$	-	$\lambda(S^* - X_1)$	$\lambda(S^* - X_1)$	$\lambda(S^* - X_1)$
Compra de $(1 - \lambda)$ Calls c/ Strike Price $X_3$	$-(1 - \lambda)c(X_1)$	-	-	-	$(1 - \lambda)(S^* - X_3)$
<b>Total</b>		-	$\lambda(S^* - X_1)$	$(X_2 - S^*) + \lambda(S^* - X_1)$	-

## APÊNDICE B

### EQUAÇÃO DIFERENCIAL A SER SATISFEITA PELO VALOR DE UM PRODUTO DERIVADO SOBRE UMA ACÇÃO QUE PREVÊ PAGAMENTO CONTINUADO DE DIVIDENDOS

Seja  $f$  o valor de uma Opção sobre uma Acção que prevê o pagamento continuado de *dividendos* a uma taxa (anualizada)  $q$ .

Admitamos que o preço  $S$  da referida Acção segue o seguinte processo estocástico:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

onde, recorde-se,  $dz$  representa um Movimento Browniano Padrão/Processo de Wiener, e onde  $\mu$  e  $\sigma$  significam, respectivamente, a taxa de crescimento relativo esperado e a volatilidade do preço da Acção. Note-se que prevendo a Acção um pagamento continuado de *dividendos*,  $\mu$  não deverá aqui ser considerado como o ganho esperado da Acção.

Ora, sendo o valor  $f$  da Opção uma função de  $S$  e de  $t$ , do Lema de Ito é possível inferir-se que:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz.$$

Considere-se, por outro lado - seguindo um processo análogo ao utilizado aquando da dedução da equação diferencial de Black-Scholes - um *Portfolio de risco-zero* (*Rishless Portfolio*) composto da seguinte forma:

- uma posição "curta" na Opção;
- uma posição "longa" em  $\frac{\partial f}{\partial S}$  títulos da Acção.

Sendo o valor do *Portfolio* dado por

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (1-1)$$

então qualquer variação no valor do mesmo num período infinitesimal de tempo  $\Delta t$ , será dada pela relação [Vd. Cap IV, Sec 4, pag 8]

$$d\Pi = \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt.$$

Acresce que, em igual período de tempo,  $\Delta t$ , o titular do *Portfolio* beneficia ainda de um outro ganho, resultante de *dividendos* entretanto recebidos, dado por:

$$qS \frac{\partial f}{\partial S} dt.$$

Se designarmos a variação da *riqueza* (wealth) global do titular do referido *Portfolio*, num período infinitesimal de tempo  $\Delta t$ , por  $\Delta W$ , então teremos,

$$dW = \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + qS \frac{\partial f}{\partial S} \right) dt. \quad (2-1)$$

Como  $\Delta W$  é independente de  $dz$ , então o *Portfolio* considerado está instantaneamente livre de risco pelo que

$$dW = r\Pi dt. \quad (3-1)$$

Finalmente, quando se substitui (1-1) e (2-1) na relação (3-1), obtemos:

$$\left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + qS \frac{\partial f}{\partial S} \right) dt = r \left( -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \right) dt$$

ou, o que é equivalente,

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} = rf$$

que constitui, justamente, a equação diferencial procurada.

## APÊNDICE C

### MODELO DE MERTON PARA A TAXA DE JURO ESTOCÁSTICA

Quando a variação no tempo da taxa de juro de risco-zero,  $r$ , não se processa de um modo que seja antecipável, previsível, admite-se que a mesma evolua segundo um processo estocástico.

Merton, que foi quem primeiro reflectiu sobre esta problemática<sup>1</sup>, assumiu que a variação de  $r$  é igual, em valor, à variação observada na taxa de juro de risco-zero de um outro título negociável, no caso, uma Obrigação ("discount bond"), com a mesma data de expiração que a Opção que se deseja avaliar.

Assim, definiu  $B(t)$  como sendo o valor de uma Obrigação ("discount bond"), com a mesma data de vencimento que a Opção a avaliar, e que remunera, na referida data, o seu titular com 1 u.m.

Merton assumiu que o valor de  $B(t)$  segue o seguinte processo estocástico:

$$\frac{dB}{B} = \mu_B B dt + \sigma_B B dz_B$$

ou, o que é equivalente,

$$dB = \mu_B B dt + \sigma_B B dz_B$$

onde  $\mu_B$  representa a taxa de crescimento relativo esperado do preço da Obrigação (cujas evoluções se considera estocásticas);  $\sigma_B$  representa a volatilidade do preço da Obrigação (que se supõe ser uma função conhecida em relação ao tempo); e  $dz_B$  é um processo de Wiener.

Merton provou que o valor de uma Opção Call e de uma Opção Put, ambas Europeias, pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c &= S\Phi(d_1) - BX\Phi(d_2) \\ p &= BX\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) \end{aligned}$$

sendo

---

<sup>1</sup> MERTON, R. C., "Theory of Rational Option Pricing" in Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (Spring 1973), pp. 141 a 183.



$$d_1 = \frac{\ln(S/X) - \ln(B) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\sigma^2(T-t) = \int_t^T (\sigma^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma\sigma_B)dt$$

O parâmetro  $\sigma$  representa a volatilidade do preço da Acção e  $\rho$  estabelece a correlação instantânea entre os preços da Acção e da Obrigação.

A variável  $B(t)$  é dada por

$$B(t) = e^{-R(T-t)}$$

onde  $R$  designa a taxa de juro de risco-zero relativa à Obrigação  $B$  que expira no instante  $T$ .

O modelo de Merton é, em síntese, uma versão do modelo de Black-Scholes, notando-se, porém, que:

1) - a taxa de juro de risco-zero,  $r$ , é substituída pela taxa de juro,  $R$ , relativa à Obrigação sem-risco considerada;

2) - a volatilidade do preço da Acção,  $\sigma$ , é substituída por  $\sigma$ .

Se, por um lado, a substituição de  $r$  por  $R$  parece ser um factor susceptível de melhorar o processo de avaliação, já a utilização de  $\sigma$  em vez de  $\sigma$  parece ter um efeito pouco significativo na melhoria da avaliação do valor da Opção, dado que a diferença entre os dois valores é irrelevante.

O modelo de Merton apresenta, comparativamente a outros modelos conhecidos para a avaliação e estudo das taxas de juro - por exemplo, o modelo de Cox, Ingersoll e Ross, de que se não falará neste trabalho - uma desvantagem, resultante do facto de exigir que a volatilidade da Obrigação seja uma função conhecida no tempo e não uma função do tempo e do próprio preço da Obrigação considerada.

## APÊNDICE D

### 1. SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Para descrever, de um modo mais rigoroso, a forma como se aplica o Método de Simulação de Monte Carlo, admita-se, numa primeira abordagem, a existência de:

(A) uma única *variável de estado* a ser simulada.

Consideremos ser  $\theta$  a referida variável, e  $m$  e  $s$ , respectivamente, a taxa de crescimento esperado e a volatilidade correspondentes.

Assim, divida-se o período de tempo considerado na simulação em  $N$  sub-intervalos de amplitude  $\Delta t$ .

A discretização do processo estocástico de  $\theta$  é, como se sabe, dado pela relação<sup>1</sup>

$$\Delta\theta = m\theta\Delta t + s\theta\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (1)$$

onde  $\Delta\theta$  representa a variação instantânea observada em  $\theta$  num período infinitesimal de tempo  $\Delta t$ , e  $\varepsilon$ , uma *realização* da variável aleatória Normal Standard.

Assim, por cada *passo* de simulação devem ser consideradas  $N$  realizações independentes da variável Normal Standard - sejam,  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Da sua substituição em (1) resultam outros tantos valores para  $\Delta\theta$  ( $\Delta\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ) relativos aos instantes  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$ .

---

<sup>1</sup> O caminho aleatório de uma variável de estado tem, naturalmente, a ver com o processo estocástico que a mesma segue, considerando uma Economia Neutra ao Risco. Quando a variável de estado segue um Movimento Browniano Geométrico é mais correcto admitir que  $\theta + \Delta\theta$  possui uma distribuição LogNormal. Assim, em vez da relação (1) deve antes ser considerada a seguinte relação:

$$\theta + \Delta\theta = \theta \exp\left[\left(m - \frac{s^2}{2}\right)\Delta t + s\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right].$$

No seu conjunto, constituem um *caminho* aleatório - de entre outros igualmente possíveis - simulado para a *variável de estado*  $\theta$ .

Uma vez *estimado* um valor para a *variável de estado*, torna-se possível o cálculo do correspondente valor terminal da Opção.

Após uma sequência alargada de idênticos *passos de simulação*, obtém-se uma boa estimativa do valor exacto da Opção, determinando a média aritmética dos valores obtidos e entretanto actualizados.

(B) Admitamos de seguida a existência de  $n$  variáveis de estado  $\theta_i$ , com  $1 \leq i \leq n$ .

Sejam,  $m_i$  e  $s_i$ , respectivamente, a taxa de crescimento esperado - numa Economia de Risco Neutro - e a volatilidade de  $\theta_i$ . Designemos por  $\rho_{ik}$  o coeficiente de correlação instantâneo entre as variáveis  $\theta_i$  e  $\theta_k$ .

Divide-se, também aqui, o período de tempo previsto de duração da Opção em  $N$  sub-intervalos de amplitude  $\Delta t$ .

A versão discreta do processo estocástico da variável  $\theta_i$  é dado pela relação

$$\Delta \theta_i = m_i \theta_i \Delta t + s_i \theta_i \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (2)$$

onde  $\Delta \theta_i$  designa a variação instantânea observada na variável  $\theta_i$  no instante  $\Delta t$ , e  $\varepsilon_i$  representa o correspondente valor amostral obtido a partir de uma distribuição Normal Standard. O coeficiente de correlação entre  $\varepsilon_i$  e  $\varepsilon_k$  será dado por  $\rho_{ik}$ , com  $1 \leq i, k \leq n$ .

Cada *passo* de simulação envolve a obtenção de  $N$  realizações de cada  $\varepsilon_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , a partir de uma distribuição Normal Standard Multivariada.

Uma vez conhecidos, os referidos valores devem ser substituídos na relação (2), obtendo-se desta maneira um *caminho* aleatório para cada uma das variáveis de estado  $\theta_i$ .

Finalmente, conhecidos os valores  $\theta_i$  é possível determinar um valor terminal para a Opção e, a partir de uma sucessão daqueles, estimar o valor exacto da Opção em causa considerando-o como a sua média aritmética.

## 2. PROCESSO GERADOR DE UMA AMOSTRA NORMAL

**2.1-** Uma *amostra* de uma distribuição Normal Standard Univariada pode obter-se através da seguinte relação:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6$$

onde  $U$  representa uma variável aleatória Uniforme com valores entre 0 e 1.

**2.2-** Quando o objectivo é a obtenção de uma *amostra* de uma distribuição Normal Bivariada, o procedimento apropriado consiste: primeiro, na determinação de valores independentes  $x_1$  e  $x_2$  a partir de uma distribuição Normal Standard, tal como anteriormente se indicou; segundo, fazer

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = x_1 \\ \varepsilon_2 = \rho x_1 + \sqrt{1 - \rho^2} x_2 \end{cases}$$

sendo  $\rho$  o coeficiente de correlação entre as variáveis que tomam parte da distribuição Normal Standard Bivariada.

**2.3-** No caso de se pretender obter uma amostra a partir de distribuições Normais Standard  $n$ -dimensionais, cujos coeficientes de correlação entre variáveis designaremos por  $\rho_{ij}$ , obtêm-se, primeiro,  $n$  realizações  $x_i$ , independentes, a partir de uma distribuição Normal Standard e, só posteriormente, os valores  $\varepsilon_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , exigindo que

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^i \alpha_{ik} x_k$$

que

$$\sum_{k=1}^i \alpha_{ik}^2 = 1$$

e ainda que

$$\sum_{k=1}^i \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \rho_{ij}$$

por forma a que  $\varepsilon_i$  possua a variância correcta e a exacta correlação com  $\varepsilon_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

## **APÊNDICE E**

### **SIMULAÇÃO PARA MODELO DA VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA COM $\rho = 0$**

(\* Simulação para Modelo da Volatilidade Estocástica com  $\rho$  igual a  $\rho_0$  \*)

Program Modelo01 (input,output);

uses WinCrt,WinProcs,WinTypes;

Var

(\* Definição de Variaveis Inteiras \*)

s,x,n,n1,num:integer;

(\* Definição de Variaveis Reais \*)

r,t,e,o,var0,passo:real;

(\* Definição de Variaveis que representam os ficheiros \*)

F1,F2,F3,F4:text;

(\* Definição de Variaveis usadas para resolver o modelo \*)

i,j:integer;

saux,w1,w2,a,dt,daux,dpaux,cvex,cvaux,cvaux0,ccvaux,cvbs,cvbs0:real;

nor1,nor2,var1,var01,var2,var02,var3,var03,varm,varm0,varesp:real;

cvexdp:double;

R\_OpenFile:TOFStruct;

Hnd1,Hnd2,Hnd3:integer;

BuffEscrever:PChar;

Procedure Gera;

Var

uni1,uni2:real;

begin

uni1 := Random;

uni2 := Random;

nor1 := sqrt(-2 \* ln(uni1)) \* cos (2 \* pi \* uni2);

nor2 := sqrt(-2 \* ln(uni1)) \* sin (2 \* pi \* uni2);

end;

Function Normal(d:real):real;

Var

dd,w,dens,nd:real;

begin

dd := abs (d);

w := 1 / (1 + 0.2316419 \* dd);

dens := exp (-sqr(dd)/2) / sqrt(2\*pi);

nd := dens \* w \* (((1.330274 \* w - 1.821256) \* w + 1.781478) \* w - 0.3565638) \* w + 0.3193815);

if d >= 0 then nd := 1 - nd;

Normal := nd;

end;

```
Function BlackSholes(valor:real):real;  
Var  
  d1,d2,rq,cvbsaux:real;  
begin  
  rq := sqrt (valor * t);  
  d1 := (daux + valor * t / 2) / rq;  
  d2 := d1 - rq;  
  cvbsaux := saux * Normal(d1) - x * a * Normal(d2);  
  BlackSholes := cvbsaux;  
end;
```

Begin {Programa Principal}

{ Inicialização de Variaveis }

```
s := 70;  
x := 100;  
r := 0.04;  
t := 0.5;  
e := 1;  
var0:= 0.1;  
o := 0;  
n1:= 150;  
num := 1000;  
passo:=0.05;
```

```
{  
Write ('Introduza o preço da Acção s ('s,') -');  
Readln(s);  
Write ('Introduza o strike price x ('x,') -');  
Readln(x);  
Write ('Introduza o valor de juro de risco-zero r ('r:10:2,') -');  
Readln(r);  
Write ('Introduza o período de validade da Opção t ('t:10:2,') -');  
Readln(t);  
Write ('Introduza o Valor de e ('e,') -');  
Readln(e);  
Write ('Introduza o Valor de var0 ('var0:10:2,') -');  
Readln(var0);  
Write ('Introduza o Valor de o ('o,') -');  
Readln(o);  
Write ('Introduza o Valor de n1 ('n1,') -');  
Readln(n1);  
Write ('Introduza o Valor de num ('num,') -');  
Readln(num);  
Write ('Introduza o Valor de passo ('passo:10:2,') -');  
Readln(passo);  
}
```

Assign (F1,'cvex.cr0');

```

Assign (F2,'cvexdp.cr0');
Assign (F3,'cvbs.cr0');
Assign (F4,'cvbs0.cr0');
Rewrite(F1);
Rewrite(F2);
Rewrite(F3);
Rewrite(F4);

```

```

saux := s;
n := n1 + n1 mod 2;
dt := t / n;
w1 := (o - sqr(e) / 2) * dt;
w2 := e * Sqrt(dt);
a := exp(-r * t);

```

```

writeln('  cvex  cvexdp  cvbs  cvbs0');

```

Repeat

```

    daux := ln(saux/x) + r * t;
    cvex:= 0;
    dpaux := 0;
    varesp := 0;

```

For i:=1 to num do {Inicio dos passos de simulação da var}

begin {Inicio do processo gerador dos valores da var}

```

    var1 := var0;
    varm := var0;
    var01 := var0;
    varm0 := var0;

```

For j:=1 to n do

begin

```

    Gera;
    var2 := var1 * exp (w1 + nor1 * w2);
    var3 := var2 * exp (w1 + nor2 * w2);
    varm := varm + var2 + var3;
    var1 := var3;
    var02 := var01 * exp (w1 - nor1 * w2);
    var03 := var02 * exp (w1 - nor2 * w2);
    varm0 := varm0 + var02 + var03;
    var01 := var03;

```

end;{Fim do processo gerador dos valores da var}

```

varm := varm / (2*n+1);
varm0 := varm0 / (2*n+1);
varesp := varesp + varm + varm0;
cvaux := BlackSholes(varm);
cvaux0 := BlackSholes(varm0);

```



```
ccvaux := (cvaux + cvaux0)/2;  
cvex := cvex + ccvaux;  
dpaux := dpaux + sqr(ccvaux);
```

```
end; {Fim dos passos de simulação da var}
```

```
cvexdp := sqrt((dpaux - sqr(cvex)/ num) / ((num-1) * num));  
cvex := cvex / num;  
varesp := varesp / ( 2 * num);  
cvbs := Blacksholes(varesp);  
cvbs0 := Blacksholes(var0);
```

```
Writeln (F1, cvex);  
Writeln (F2, cvexdp);  
Writeln (F3, cvbs);  
Writeln (F4, cvbs0);
```

```
writeln (cvex:10:4,cvexdp:10:4,cvbs:10:4,cvbs0:10:4);
```

```
saux := saux + x * passo;
```

```
Until (saux / x) > 1.3;
```

```
Close(F1);  
Close(F2);  
Close(F3);  
Close(F4);
```

```
End.{Fim do Programa Principal}
```

## **APÊNDICE F**

### **SIMULAÇÃO PARA MODELO DA VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA COM $\rho \neq 0$**

```

(* Simulação para Modelo da Volatilidade Estocástica com ro diferente de r0 *)

Program Modelo02 (input,output);

uses WinCrt,WinProcs,WinTypes;

Var

(* Definição de Variaveis Inteiras *)

s,x,e,o,ro,n,num:integer;

(* Definição de Variaveis Reais *)

r,t,u,var0,passo:real;

(* Definição de Variaveis que representam os ficheiros *)

F1,F2,F3:text;

(* Definição de Variaveis usadas para resolver o modelo *)

i,j,inc:integer;
saux,daux,dpaux,s1,w1,w2,w3,dt,a,var1:real;
cvex,cvexdp,cvbs,cvaux,cvbsaux,nor1,nor2:real;

R_OpenFile:TOFStruct;
Hnd1,Hnd2,Hnd3:integer;
BuffEscrever:PChar;

Procedure Gera;
Var
uni1,uni2:real;
begin
uni1 := Random;
uni2 := Random;
nor1 := Sqrt(-2 * ln(uni1)) * cos (2 * pi * uni2);
nor2 := Sqrt(-2 * ln(uni1)) * sin (2 * pi * uni2);
end;

Function Normal(d:real):real;
Var
dd,w,dens,nd:real;
begin
dd := abs (d);
w := 1 / (1 + 0.2316419 * dd);
dens := exp (-sqr(dd)/2) / sqrt(2*pi);
nd := dens * w * (((1.330274 * w - 1.821256) * w + 1.781478) * w - 0.3565638) * w +
0.3193815);
if d >= 0 then nd := 1 - nd;

```

```
Normal := nd;  
end;
```

```
Function BlackSholes(valor:real):real;  
Var  
  d1,d2,rq,cvbsaux:real;  
begin  
  rq := sqrt (valor * t);  
  d1 := (daux + valor * t / 2) / rq;  
  d2 := d1 - rq;  
  cvbsaux := saux * Normal(d1) - x * a * Normal(d2);  
  BlackSholes := cvbsaux;  
end;
```

```
Function max(z,w:real):real;  
begin  
  if z > w then max := z  
  else max := w;  
end;
```

```
Begin {Programa Principal}
```

```
(* Inicialização de Variaveis *)
```

```
s := 70;  
x := 100;  
t := 0.25;  
r := 0.04;  
u := 0.04;  
e := 1;  
var0:= 0.2;  
o := 0;  
ro := 1;  
n:= 150;  
num := 1000;  
passo:=0.05;
```

```
(* Write ('Introduza o preço da Acção s ('s,') -');  
Readln(s);  
Write ('Introduza o Strike price x ('x,') -');  
Readln(x);  
Write ('Introduza o valor da taxa de juro de risco-zero r ('r:10:2,') -');  
Readln(r);  
Write ('Introduza o período de validade da Opção t ('t:10:2,') -');  
Readln(t);  
Write ('Introduza o Valor de u ('u:10:2,') -');  
Readln(u);  
Write ('Introduza o Valor de e ('e,') -');  
Readln(e);  
Write ('Introduza o Valor de var0 ('var0:10:2,') -');  
Readln(var0);
```

```

Write ('Introduza o Valor de o ('o,') -');
Readln(o);
Write ('Introduza o Valor de ro ('ro,') -');
Readln(ro);
Write ('Introduza o Valor de n ('n,') -');
Readln(n);
Write ('Introduza o Valor de num ('num,') -');
Readln(num);
Write ('Introduza o Valor de passo ('passo:10:2,') -');
Readln(passo);
*)

```

```

Assign (F1,'cvex.cro');
Assign (F2,'cvexdp.cro');
Assign (F3,'cvbs.cro');
Rewrite(F1);
Rewrite(F2);
Rewrite(F3);

```

```

{randomize;
inc := 0;}
saux := s;
dt := t / n;
w1 := (o - sqr(e) / 2) * dt;
w2 := ro * e * sqrt(dt);
w3 := e * sqrt((1 - sqr(ro))*dt);
a := exp(-r*t);

```

Repeat {Inicio do Processo de Simulação}

```

daux := ln(saux/x) + r * t;
cvex:= 0;
dpaux := 0;

```

For i:=1 to num do {Inicio dos passos de simulação}

begin

```

var1 := var0;
s1 := saux;

```

For j:=1 to n do

begin {Inicio processo gerador de var e s}

```

Gera;
s1:= s1 * exp ((u-var1 / 2) * dt + nor1 * sqrt (var1 * dt));
var1 := var1 * exp (w1 + w2 * nor1 + w3 * nor2);

```

end;{Fim do processo gerador de var e s}

```

cvaux := a * max(s1 - x,0);
cvex := cvex + cvaux;
dpaux := dpaux + sqr(cvaux); 210

```

```
end;{Fim dos passos de simulação}
```

```
cvexdp := sqrt((dpaux - sqr(cvex) / num) / ((num - 1) * num));
```

```
cvex := cvex / num;
```

```
cvbs := BlackSholes(var0);
```

```
Writeln (F1, cvex);
```

```
Writeln (F2, cvexdp);
```

```
Writeln (F3, cvbs);
```

```
writeln (cvex:10:4,cvexdp:10:4,cvbs:10:4);
```

```
saux := saux + x * passo;
```

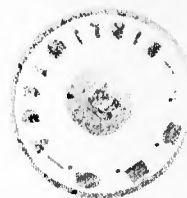
```
Until saux / x > 1.3;
```

```
Close(F1);
```

```
Close(F2);
```

```
Close(F3);
```

```
End.{Fim do Programa Principal}
```



## BIBLIOGRAFIA

ARDITTI, F. D. - *Derivatives, A Comprehensive Resource for Options, Futures, Interest Rate Swaps, and Mortgage Securities*, Harvard Business School Press, Boston, Massachusetts.

BARREIROS, Artur - *Avaliação Computacional de Opções de Taxa de Juro*, Edição da APDMC - Associação Portuguesa para o Desenvolvimento do Mercado de Capitais.

BOYLE, P.P. - *Options: a Monte Carlo Approach*, Journal of Financial Economics (May 1977), pp.323-338.

BOYLE, P.P. - *A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1 (March 1988), pp. 1-12.

COURTADON, G. - *A More Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 5, (December 1982).

COX, J. C. e RUBINSTEIN, M. - *Options Markets*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

COX, J.C. e ROSS, S. A. - *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes*, Journal of Economics, 3 (March 1976), 145-166.

COX, J.C., ROSS, S.A. e RUBINSTEIN - *Options Pricing: a Simplified Approach*, Journal of Financial Economics (Oct. 1979), pp. 229 - 264.

DREZNER, Z. - *Computation of the Bivariate Normal Integral*, Mathematics of Computation, 32 (January 1978), pp. 277-279.

DUMAS, B. e ALLAZ, B. - *Financial Securities, Market Equilibrium and Pricing Methods*, Chapman & Hall.

GESKE, R. - *The valuation of compound options*, Journal of Financial Economics, 7 (1979), pp. 63-81.

GESKE, R. e SHASTRI, K. - *Valuation by Approximation: a Comparison of Alternative Option Valuation Techniques*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1 (March 1985), pp. 45-71.

HULL, J. - *Options, Futures and Other Derivative Securities*, 2<sup>nd</sup>. Ed.

HULL, J. e WHITE, A., *Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1 (March 1990), pp. 87-100.

JARROW, R. e RUDD, A. - *Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes*, Journal of Financial Economics, 10 (November 1982), pp. 347-369.

MCMILLAN, L. G. - *Options as a Strategic Investment*, 3<sup>rd</sup>. Ed., Mcmillan.

PEIXOTO, J.P. - *Futuros e Opções*, McGraw-Hill.